Devoir Surveillé n° 7 sujet 1.
le 21 février.

PROBLÈME 1

II existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

Q1. Question préliminaire
Si on admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Partie I

Q2. On note, pour tout entier naturel $n, W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, \mathrm{d}x$.
Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin x)^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n.

En déduire, pour tout entier naturel n, que $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q3. Déterminer sur l'intervalle $]-1, 1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$.

Q4. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[, x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$.

Q5. Justifier que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}\right] \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \, \mathrm{d}x.$$

Q6. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie II

Q7. Donner sur l'intervalle]-1,1[le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} \, \mathrm{d}x$.

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

Q8. On pose pour $x \in [0, +\infty[\,, f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$.
Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Q9. Établir que cette fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

Q10. Réduire au même dénominateur l'expression $\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2 t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x \in]0\,;1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$.

Q11. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

PROBLÈME 2 - Intégrales de Fresnel

Dans ce problème, on étudie certaines intégrales et séries numériques reliées aux intégrales dites de Fresnel. Augustin Fresnel (1788-1827) démontra le caractère ondulatoire de la lumière et, pour cette raison, il est considéré comme un des fondateurs de l'optique moderne.

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Dans cette partie, on définit la fonction H par l'expression $H(x) = \displaystyle\int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t$, où e^{it^2} signifie $\exp\left(it^2\right)$.

Q12. Démontrer que H est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $H'(x)$.

Q13. Étudier la parité de la fonction H.

Q14. Démontrer que la fonction $t \mapsto e^{it^2}$ est développable en série entière au voisinage de 0. En déduire un développement en série entière de la fonction H au voisinage de 0, en précisant l'intervalle sur lequel ce développement est valable.

Q15. Si $x > 0$, démontrer que :

$$H(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Q16. Pour $x > 4\pi^2$, en déduire que :

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = -i\frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}} du.$$

Q17. En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Dans cette partie, on étudie la fonction g d'expression :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2\left(t^2-i\right)}}{t^2-i}\,\mathrm{d}t$$

Pour cela, on pose $f(x,t) = \dfrac{e^{-x^2\left(t^2-i\right)}}{t^2-i}$.

Q18. Si $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, déterminer les modules des nombres complexes $\mathrm{e}^{-x^2\left(t^2-i\right)}$ et $t^2 - i$.

Q19. Démontrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser un argument de parité).

Q20. Soit $(x_n)_n$ une suite divergente vers $+\infty$. À l'aide du théorème de convergence dominée, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} g\left(x_n\right) = 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Q21. Démontrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Q22. On admet dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à $\sqrt{\pi}$. Vérifier que :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}$$

Q23. Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2 - i}$.
On admet ensuite que :

$$\frac{1}{X^2-i} = \frac{1-i}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2X-\sqrt{2}}{X^2 - X\sqrt{2}+1} + \frac{i}{X^2 - X\sqrt{2}+1}\right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2X+\sqrt{2}}{X^2 + X\sqrt{2}+1} + \frac{i}{X^2 + X\sqrt{2}+1}\right).$$

Démontrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t = \pi\sqrt{2}$. Donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t$ puis déterminer la valeur de $g(0)$.

Q24. En déduire que :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi} \times H(x)$$

où la fonction H a été introduite dans la partie I.
Donner ensuite les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$.