

Devoir Surveillé n° 8 sujet 1.

le 28 mars.

Exercice 1

Q1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

- a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.
- b) Donner la définition de « f différentiable en $(0, 0)$ ».

Q2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

On considère les équations différentielles :

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

$$(H) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0$$

On note $I =]0; +\infty[$, $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I .

Q3. Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $S_I(H)$.

Q4. Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$.

Q5. On note pour $x \in I$, $g(x) = \frac{-1}{x^2}$ et $h(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x^2}$.

On admet dans cette question que $g \in S_I(E)$ et $h \in S_I(H)$.
Donner, sans calculs, l'ensemble $S_I(E)$.

Q6. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}(H)$ (solutions de (H) sur $\mathbb{R}$) ?

Exercice 3

Dans cet exercice, $\| \cdot \|$ désigne une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une norme vérifiant, pour tout couple (A, B) de matrices de $M_n(\mathbb{R})$, $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Q7. Démontrer que pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ converge. On notera e^A sa somme.

Q8. Démontrer que l'application $A \mapsto e^A$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.

Q9. Si $H \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon $r > 0$, déterminer la limite de $\frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k$ lorsque H tend vers 0 .

En déduire que l'application $A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0 .
On précisera sa différentielle en 0 .

Problème

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

Par la suite, n désigne un entier naturel, $n \geq 2$.

Partie I - Étude de quelques exemples

Q10. Justifier que deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

Q11. On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même déterminant, le même rang et le même polynôme caractéristique.

Ces deux matrices sont-elles semblables? (on pourra vérifier que l'une de ces matrices est diagonalisable).

Ont-elles le même polynôme minimal?

Q12. On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :

première méthode : en utilisant u l'endomorphisme associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E ;

deuxième méthode : en prouvant que le polynôme $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ .

Q13. Démontrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

On pourra utiliser l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice A .

Q14. Application : soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E de rang 1 vérifiant $uou \neq 0$, démontrer que u est diagonalisable.
On pourra calculer U^2 .

Q15. Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

Q16. On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α et β sont deux nombres complexes

non nuls, différents et non opposés.

Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A .

Justifier que $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$ sont aussi valeurs propres de A .

Préciser une base de vecteurs propres de A .

Dans cette question, il est déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de la matrice A .

Q17. Démontrer que quels que soient les réels non nuls a, b et le réel λ , les matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

Partie II - Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

Q18. Démontrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.

Q19. Justifier que la fonction $x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $R + xS$ soit inversible.

Q20. Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q21. Application : démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie III

On s'intéresse dans cette question à la proposition P_n :
«Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ».

Q22. En étudiant les différentes valeurs possibles pour le polynôme caractéristique et le même polynôme minimal, démontrer que la proposition P_n est vraie pour $n = 2$.

On admet qu'elle l'est également pour $n = 3$.

Q23. Démontrer que la proposition P_n est fausse pour $n = 4$. On pourra fournir deux matrices composées uniquement de 0 et de 1.