

Conseils :

- Lisez attentivement l'énoncé du début à la fin et choisissez **ensuite** par quel problème commencer (aucun ordre n'est imposé).
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).
Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

ÉTUDE DU LARGE HADRON COLLIDER DU CERN

Le Grand Collisionneur de Hadrons (Large Hadron Collider : LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de 27 kilomètres de circonférence et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde.

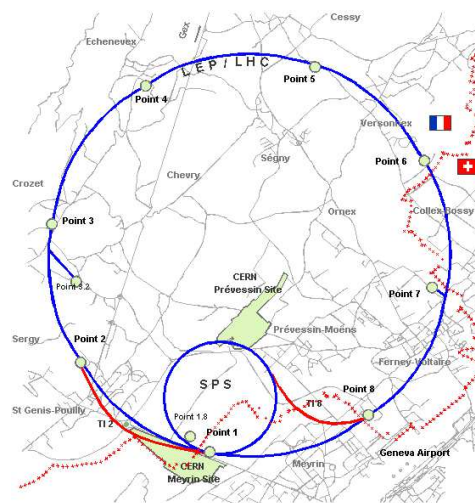


FIGURE 1 – Photographie aérienne et carte du LHC.

Dans les accélérateurs de particules, des protons (ou des ions) de très haute énergie circulant dans deux faisceaux tournant à contre-sens se choquent les uns contre les autres, dans le but de rechercher des indices de la supersymétrie, de la matière noire ou encore de l'origine de la masse des particules élémentaires. Les faisceaux se composent de paquets contenant des centaines de milliards de protons chacun. Voyageant quasiment à la vitesse de la lumière, ils sont injectés, accélérés, et maintenus en circulation pendant des heures, guidés par des milliers d'aimants supraconducteurs puissants. L'énergie des protons est transformée au moment du choc en une myriade de particules exotiques, que les détecteurs observent avec attention.

Le 04 juillet 2012, les chercheurs ont annoncé l'observation du boson de Higgs dont l'existence était prédite par le modèle standard. On se propose dans ce problème de comprendre quelques aspects du fonctionnement du LHC.

Constantes physiques :

Masse du proton	$m_p = 1,6 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Charge électrique élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$

1 Brève histoire d'un proton accéléré par le complexe d'accélérateurs du LHC au CERN

Dans cette partie, nous étudions la trajectoire des protons dans le Large Hadron Collider. Le LHC est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes.

Chaque accélérateur injecte un faisceau dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite.

Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

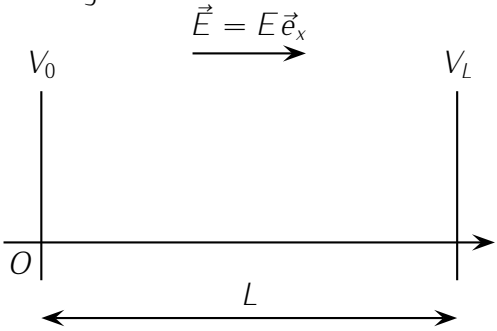


FIGURE 2 – Schéma du dispositif d'accélération des protons

A. Particule dans un champ électrique constant et uniforme

On étudie une accélération simple entre deux électrodes comme représenté sur la figure 2.

- Q1
1. Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$?
- Q2
2. Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force générée par un champ $E = 100 \text{ kV/m}$. On prendra $g = 10 \text{ N/kg}$.
- Q3
3. En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un proton, exprimer l'accélération que ressent un proton dans une zone de l'espace où règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$.
La zone de l'espace où règne le champ $\vec{E}$ a une longueur L . On considère que le potentiel V_0 du plan $x = 0$ est nul, on note V_L le potentiel du plan $x = L$.

- Q4 4. Rappeler le lien entre le potentiel électrique et l'énergie potentielle ou la définition générale du potentiel électrique. En déduire le lien entre V_L , E et les données du problème. On sera attentif aux signes.
- Q5 5. En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer, par la méthode de votre choix, la vitesse en sortie de la zone d'accélération, en fonction de V_L , puis de E .

B. Particule dans un champ électrique constant et uniforme

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN.

Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs. Ces protons sont accélérés par une tension maximale U_c toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes. Les protons sont injectés en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ parallèle à l'axe de l'accélérateur et générée par une tension pré-acceleratrice U_0 .

Source de protons
pré-accelérés par
une tension U_0

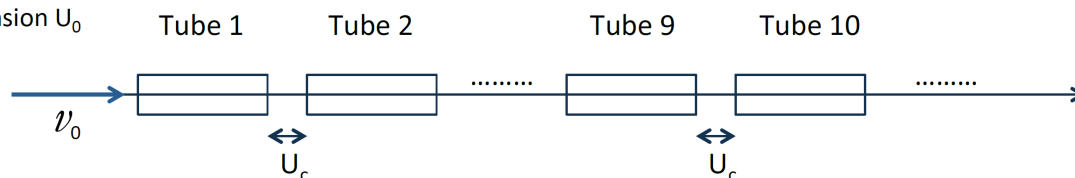


FIGURE 3 – Le linac 2

- Q6 1. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ?
- Q7 2. Exprimer leur énergie cinétique à la sortie du n -ième tube en fonction de U_c et U_0 .
- Q8 3. Calculer numériquement la valeur de la vitesse des protons à la sortie du 10^e tube pour $U_0 = 200 \text{ kV}$, $U_c = 2000 \text{ kV}$.

C. Détails d'un accélérateur linéaire (questions un peu plus délicates)

Un moyen d'arriver à avoir une accélération avec une tension élevée à l'aide de plusieurs tubes est d'utiliser un accélérateur de Wideröe. Les protons produits au niveau de la source (avec une vitesse quasi-nulle), traversent des tubes de cuivre reliés à l'une ou à l'autre des bornes du générateur représenté sur la figure 4.

La tension délivrée par le générateur est : $V(t) = -V_{\max} \sin(\omega t + \phi)$ avec $V_{\max}$ positif et $0 < \phi < 2\pi$. On note T la période du signal. Les tubes sont distants de d' . À l'intérieur de chaque tube, le champ électrique est nul ; il est uniforme entre deux tubes consécutifs. On supposera que d' est suffisamment faible, pour que l'on puisse considérer que le proton voit un champ électrique indépendant du temps, entre deux tubes consécutifs.

Le point B_0 est placé à la sortie de la source, les différents points B_i sont placés à la sortie des tubes i pour $i \in \{1..5\}$. On note L_i la longueur du tube i . De même, on note v_i la vitesse au point B_i pour $i \in \{1..5\}$.

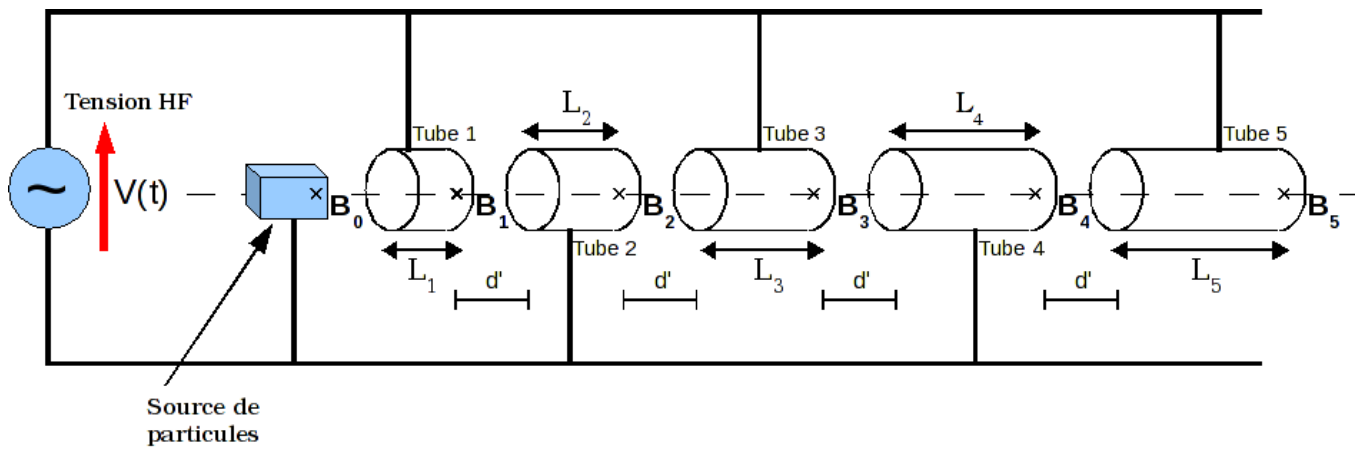


FIGURE 4 – Accélérateur de WILDERÖE

- Q9 1. Représenter sur votre copie les vecteurs champs électriques, à la date $t = 0$, aux points B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 et B_5 . Pour le dessin, on prendra $0 < \phi < \pi$.
- Q10 2. Même question à la date $t = \frac{T}{2}$.
- Q11 3. De façon qualitative, à quelle condition les protons sont-ils toujours accélérés?
- Q12 4. Si la condition précédente est respectée, représenter en fonction du temps l'allure de la vitesse des protons entre les points B_0 et B_5 .
- Q13 5. Exprimer L_i la longueur du tube permettant une accélération optimale en fonction de v_i et de T . Les tubes ont-ils tous la même longueur, pour une accélération optimale?
- Q14 6. Pour une vitesse proche de c , et une fréquence du GBF égale à 10 MHz, calculer la longueur d'un tube.

D. Du linac 2 au synchrotron à protons (PS)

Un élément fondamental du complexe accélérateur est le synchrotron à protons (PS). Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le PS a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC.

On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

À $t = 0$ sa vitesse $\vec{v}_0$ est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la figure 5.

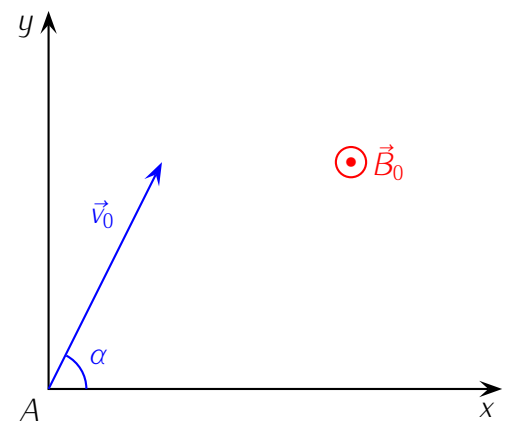


FIGURE 5 – Vitesse du proton dans le champ magnétique

- Q15 1. Donner le nom et l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique $\vec{B}_0$.
Pour les questions suivantes, on considère que le proton n'est soumis qu'à cette force.
- Q16 2. Reproduire la figure 5 sur votre copie afin de représenter la force magnétique subie par le proton en A. Exprimer la norme de cette force.
- Q17 3. Montrer que le travail associé à cette force est nul. En déduire que le mouvement du proton est uniforme.

- Q18 4. Par projection du principe fondamental de la dynamique, établir trois équations différentielles en v_x , v_y , v_z et leurs dérivées temporelles.
On ne cherchera pas à les résoudre. À partir de là, **on admet que la trajectoire du proton est un cercle.**
- Q19 5. Sur le schéma de la question 2, dessiner l'allure de la trajectoire. Exprimer le rayon de la trajectoire en fonction de m_p , B_0 , e , v_0 .

E. Rayonnement synchrotron dans le LHC

Lorsqu'une particule est accélérée, elle émet un rayonnement électromagnétique que l'on nomme rayonnement synchrotron. La puissance rayonnée dépend de la charge q de la particule, du rayon de courbure r de la trajectoire et des constantes c et ε_0 . On supposera que la puissance rayonnée par une particule en mouvement circulaire est de la forme :

$$P = K q^2 c \varepsilon_0^{-1} r^\alpha \quad K \text{ étant une constante sans dimension.}$$

- Q20 1. Par analyse dimensionnelle en utilisant une formule de votre choix, déterminer la dimension de la grandeur $\frac{q^2}{\varepsilon_0}$.
- Q21 2. Par analyse dimensionnelle, déterminer alors α .

FRACTIONNEMENT DU CARBONE

On appelle fractionnement isotopique un processus (physique ou chimique) faisant intervenir un élément chimique et qui modifie les rapports isotopiques de cet élément. Sur Terre, la matière vivante est basée sur des composés du carbone. Cet élément possède deux isotopes stables : ^{12}C , de loin le plus abondant puisqu'il représente environ 99% du carbone sur Terre et ^{13}C , représentant environ 1 % (on trouve également ^{14}C mais seulement à l'état de trace, cet isotope étant créé dans la haute atmosphère par les rayons cosmiques et ayant une demi-vie de 5700 ans). Il a été établi que la conversion du carbone inorganique en substances biogènes induit un fractionnement isotopique en faveur du ^{12}C , i.e. la proportion de carbone 12 est plus importante dans les organismes vivants que dans l'air. Cette préférence pour le ^{12}C se révèle être une signature durable des substances biologiques pouvant être préservée dans les matières organiques fossiles. Les relevés ont ainsi permis de montrer le fractionnement isotopique biologique du carbone tout au long de 3,8 milliards d'années d'histoire terrestre et notamment l'existence d'écosystèmes microbiens sur la Terre archéenne. Dans le métabolisme des organismes fixateurs du CO_2 atmosphérique (organismes autotrophes tels que les plantes), la première étape consiste en un transfert du CO_2 présent dans l'air vers l'intérieur des tissus vivants.

Le fractionnement isotopique lors de la fixation du carbone par les organismes vivants est principalement dû à un effet cinétique isotopique (*kinetic isotopic effect*), c'est-à-dire à la variation de la vitesse d'une réaction chimique lorsqu'un atome appartenant à l'un des réactifs est remplacé par l'un de ses isotopes. Ce problème propose de comprendre en quoi cet effet isotopique cinétique peut être d'origine quantique puis de traiter l'exemple de la photosynthèse du cycle de Calvin. Données numériques :

- constante de Planck : $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J.s, constante de Planck réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi}$,
- constante de Boltzmann : $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23}$ J.K $^{-1}$,
- vitesse de la lumière $c = 3,0 \cdot 10^8$ m.s $^{-1}$,
- masse d'un nucléon (proton ou neutron) $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

On considère un atome de masse m situé au sein d'une molécule. Dans un modèle unidimensionnel où la fonction d'onde décrivant l'atome ne dépend que l'abscisse x , on suppose que l'environnement de l'atome peut être modélisé par l'énergie potentielle $E_p(x) = E_0 + \frac{1}{2}K_0(x - x_0)^2$, où K_0 désigne une constante positive.

- Q22 1. Sans agitation thermique, où se situe l'atome à l'équilibre dans une description classique ? Que vaut alors son énergie ?

On note Δx l'écart-type de la position de l'atome le long de l'axe Ox et p_x la quantité de mouvement de l'atome selon Ox . En notant $\langle \rangle$ la valeur moyenne, on rappelle que, par définition de l'écart-type, $(\Delta p_x)^2 = \langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle$.

- Q23 2. Après avoir rappelé l'inégalité de Heisenberg spatiale, expliquer pourquoi la mécanique quantique interdit l'état d'équilibre prédit par la mécanique classique.

- Q24 3. Justifier que $\langle p_x^2 \rangle = (\Delta p_x)^2$ d'une part et que $\langle x \rangle = x_0$ d'autre part.

- Q25 4. En déduire que l'énergie E de l'atome dans un état stationnaire est minorée par la quantité $E_{\min} = \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}K_0(\Delta x)^2 + E_0$.

- Q26 5. En déduire que le confinement de l'atome entraîne que l'énergie de son état fondamental vaut au minimum $E_{\text{ZPE},0} = E_0 + \frac{\hbar\omega_0}{2}$. Exprimer ω_0 en fonction de K_0 et m . Que représente concrètement ω_0 dans une description classique de l'atome ?

On admettra pour la suite que $E_{\text{ZPE},0}$, appelé parfois l'« énergie du point zéro », correspond exactement à l'énergie de l'état fondamental de l'atome.

On étudie maintenant le cas d'une réaction chimique : l'environnement de l'atome change au cours de la réaction, dont on paramètre la progression par une variable y , appelée « coordonnée de la réaction ». Pour $y = 0$, le système est constitué des réactifs (la réaction n'a pas commencé) et

pour $y = 1$, il est constitué des produits (la réaction est terminée). Très fréquemment, lors de la réaction, le système se trouve dans un état de transition énergétiquement défavorable. Le passage par cet état est l'étape cinétiquement limitante de la réaction. Lorsque le système est dans l'état de transition, l'énergie potentielle de l'atome vaut $E_p(x) = E_t + \frac{1}{2}K_t(x - x_t)^2$, avec $E_t > E_0$ et $K_t \geq 0$.

La figure n°1 représente la courbe $E_p(x)$ pour l'état initial et l'état de transition. La figure n°2 représente le minimum de l'énergie potentielle en fonction de la coordonnée de réaction y . Enfin la figure n°3 donne l'allure de l'énergie potentielle E_p en fonction de x et de y .

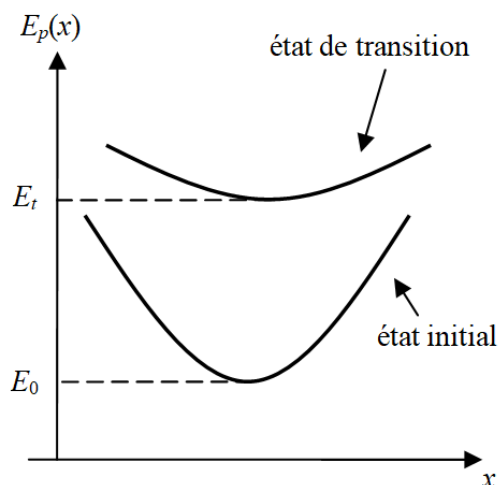


Figure n°1

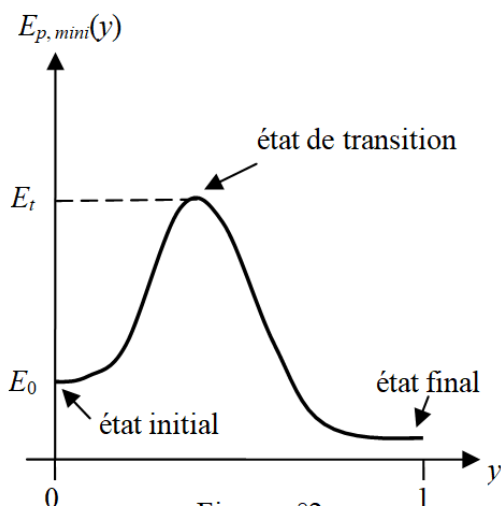


Figure n°2

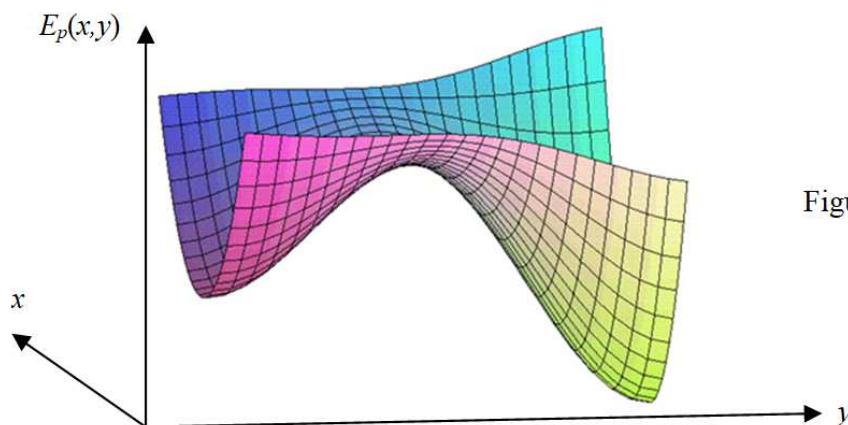


Figure n°3

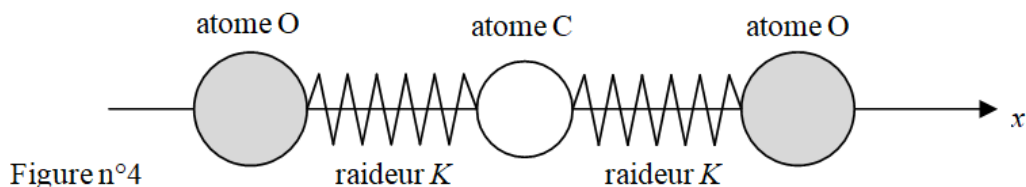
Lorsqu'elle existe, la constante de vitesse k de la réaction dépend fortement de la température T en suivant la loi d'Arrhenius qui s'écrit $k = A \exp\left(-\frac{E_a}{k_B T}\right)$, où A est un facteur constant et le paramètre E_a , appelé l'énergie d'activation, correspond à la différence d'énergie du système entre l'état de transition et l'état initial (grandeur positive). Dans le cadre de l'étude de l'effet isotopique cinétique, on compare les constantes de réaction k_L et k_H de la même réaction chimique, mais impliquant dans l'un des réactifs respectivement un atome léger (light) de masse m_L et l'un de ses isotopes, plus lourd (heavy), de masse m_H . On définit alors l'effet isotopique cinétique *KIE* (*Kinetic Isotopic Effect*) par le rapport $\frac{k_L}{k_H}$.

Q27 6. Justifier que l'énergie minimale de l'atome dépend de sa masse.

Q28 7. On suppose que l'atome reste dans son état de plus basse énergie tout au long de la réaction. Reproduire la figure 1 et la compléter en faisant apparaître les énergies minimales des atomes légers et lourds dans les états initiaux et finaux (on notera ces énergies : $E_{ZPE,0,L}$, $E_{ZPE,0,H}$, $E_{ZPE,T,L}$, $E_{ZPE,T,H}$ oui, les notations sont un peu longues, mais on comprend $ZPE, 0, L$: **Z**ero **P**oint **E**nergy dans l'état **0** de l'atome **L**éger)

- Q29 8. Représenter sur ce même schéma les énergies d'activation pour l'atome léger $E_{a,L}$ et l'atome lourd $E_{a,H}$.
- Q30 9. En supposant que l'atome reste dans son état de plus basse énergie tout au long de la réaction, expliquer comment le résultat de la question 5 permet d'expliquer l'effet isotopique cinétique.
- Q31 10. Dans la grande majorité des cas, dans l'état de transition, les forces de liaison agissant sur l'atome sont plus faibles (car l'étape cinétiquement déterminante consiste souvent en une rupture de liaison). En déduire que $E_{a,L} < E_{a,H}$.
On dit que l'effet isotopique cinétique est normal si $K/E > 1$.
- Q32 11. Justifier le qualificatif « normal ».

L'assimilation du carbone par les organismes vivants peut se faire de différentes manières. On traite le cas (le plus fréquent) de la photosynthèse des plantes de type C3, où le carbone provient du CO_2 (atmosphérique ou dissous) qui est intégré dans des molécules organiques lors de l'étape de carboxylation du cycle de Calvin : une enzyme (ribulose-1,5-bisphosphate carboxylase, encore appelée le "RuBisCo") permet de fixer le carbone selon une réaction dite de carboxylation de la forme $\text{CO}_2 + \text{R} - \text{H} = \text{R} - \text{COOH}$. On se propose d'évaluer la valeur de K/E pour cette réaction à l'aide d'un modèle se voulant le plus simple possible. On modélise pour cela la molécule de CO_2 par un système de trois masses et de deux ressorts, comme l'illustre la figure n°4.



En spectroscopie infrarouge, la molécule CO_2 possède un pic d'absorption pour une longueur d'onde $\lambda_0 = 4,3 \mu\text{m}$, correspondant à la résonance du mode de vibration d'élongation antisymétrique, pour lequel les deux atomes O d'une part et l'atome C d'autre part oscillent en opposition de phase. On note m_C la masse de l'atome de carbone. Pour simplifier, on suppose que les atomes O, étant plus massifs, sont immobiles.

- Q33 12. Avec cette hypothèse simplificatrice, relier K , m_C et λ_0 et c . On fait l'hypothèse que l'étape cinétiquement limitante de la carboxylation implique la rupture de la liaison π entre C et l'un des atomes O. Pour simplifier, on considère que l'état de transition de CO_2 correspond au cas où l'un des deux ressorts est absent (une liaison σ étant moins forte qu'une liaison π).
- Q34 13. Quel lien simple existe-t-il alors entre K_0 et K_t ?
- Q35 14. En supposant que le facteur pré-exponentiel A dans la loi d'Arrhenius est identique pour les deux isotopes, déduire des différents résultats précédents que l'effet cinétique isotopique en remplaçant $^{12}\text{CO}_2$ par $^{13}\text{CO}_2$ pour la réaction de carboxylation a pour expression

$$K/E = \exp \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(1 - \sqrt{\frac{12}{13}} \right) \frac{hc}{2\lambda_0 k_B T} \right)$$

. Des mesures de compositions isotopiques montrent que la matière végétale des plantes de type C3 possède un rapport $^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$ entre 1,6 et 2,7 % (avec une moyenne de 2,0 %) plus faible que celui du CO_2 atmosphérique (d'après l'article de Manfred Schidlowski, *carbon isotopes as biogeochemical recorders of life over 3.8 Ga of Earth history : evolution of a concept*, **Precambrian Research**, 106 (2001) 117-134).

- Q36 15. Confronter ces valeurs à ce que prévoit le modèle précédent. Commenter.

ÉTUDE DU LARGE HADRON COLLIDER DU CERN

CAPES 2011 et ATS 2015

1 Brève histoire d'un proton accéléré par le complexe d'accélérateurs du LHC au CERN

A. Particule dans un champ électrique constant et uniforme

- Q1 1. Il s'agit de la partie électrique de la force de Lorentz : $\vec{F} = q\vec{E}$.
- Q2 2. En ordre de grandeur $qE = 1,6 \times 10^{-19} \times 10^5 = 1,6 \times 10^{-14} \text{ N}$. Le poids $P = mg = 1,67 \times 10^{-27} \times 10 \simeq 10^{-26} \text{ N}$. Soit 10^{12} fois plus faible. Le poids est donc négligeable compte tenu de la précision des données de l'énoncé.

Donner la valeur du rapport pour montrer que l'un est négligeable par rapport à l'autre. On néglige toujours dans des sommes/différences et jamais dans des produits/rapports.

Remarque : ayez conscience que ces histoires de "négligeables" sont toujours fonctions de la précision souhaitée ou de la précision sur les données. Ainsi, si $A \simeq B/1000$, alors $A + B \simeq B$ si on travaille avec 2 chiffres significatifs, mais pas du tout si on travaille avec 5 chiffres significatifs.

- Q3 3. Le système est le proton, le référentiel est le référentiel terrestre, galiléen $m\vec{a} = q\vec{E}$
d'où $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$.
- Q4 4. Le potentiel électrique est tel que la variation du potentiel électrique entre deux points est égale à l'opposé de la circulation du champ électrique : $-\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(B) - V(A)$.
On applique la définition entre un point en $x = 0$ et un deuxième en $x = L$.

$$-\int_{x=0}^L E \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x = V_L - V_0 \Rightarrow V_L = -EL$$

- Q5 5. Le plus simple est d'utiliser une méthode énergétique. Le référentiel est galiléen et on considère un système ponctuel, on en déduit par application du théorème de l'énergie mécanique $E_m(x = L) - E_m(x = 0) = W_{nc} = 0$ puisque seul la force de Lorentz est appliquée au système. L'énergie potentielle est $E_p = qV$.

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV_L - 0 - qV_0 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{-2eV_L}{m}} = \sqrt{\frac{2eEL}{m}}$$

B. Particule dans un champ électrique constant et uniforme

- Q6 1. En reprenant le résultat de la question précédente et en l'appliquant entre deux tubes successifs, $E_{C,i+1} + eV_{i+1} - E_{C,i} - eV_i = 0 \Rightarrow E_{C,i+1} - E_{C,i} = e(V_i - V_{i+1}) = qU_c$.
- Q7 2. À la sortie du n^{e} tube, la particule a été accélérée par U_0 puis $n-1$ fois par U_c . L'énergie cinétique est donc $E_{C,n} = e(U_0 + (n-1)U_c)$.

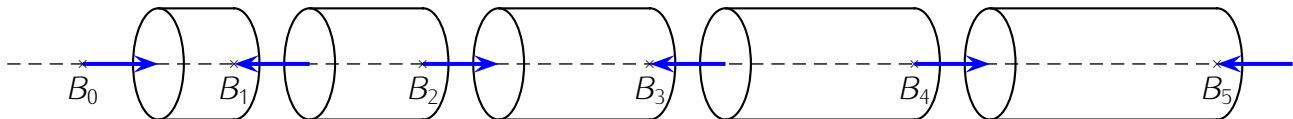
Q8

3. $E_{C,10} = eU_0 + 9eU_c = 1,6 \times 10^{19}(2 \times 10^5 + 9 \times 2 \times 10^6) = 1,6 \times 10^{-19} \times 182 \times 10^5 \simeq$
 $\boxed{2,8 \times 10^{-12} \text{ J} = 18,2 \text{ MeV}}$.

$v = \sqrt{2E_c/m} = \sqrt{2 \times 2,8 \times 10^{-12} / (1,67 \times 10^{-27})} = \sqrt{3,6 \times 10^{15}} = \sqrt{0,36 \times 10^{16}} \simeq 0,6 \times 10^8 \text{ m/s}$. Ces électrons vont moins vite que $c/3 = 10^8 \text{ m/s}$, ils n'est donc pas nécessaire de les considérer comme relativistes.

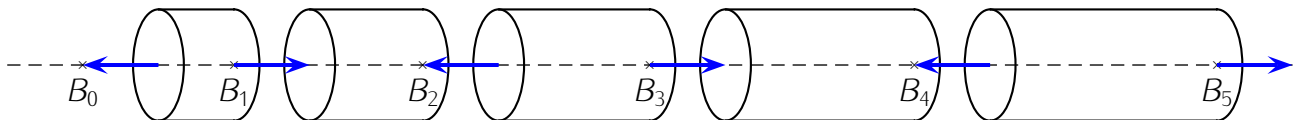
Q9

1. À $t = 0$ et pour $0 < \phi < \pi$, la tension est négative : $V(t) < 0$. Le champ électrique est de sens "opposé" à la tension de façon à ce que les charges positives "descendent" les potentiels. Ainsi le champ électrique au niveau de B_0 est orienté de B_0 vers B_1 , et en B_1 c'est l'inverse (et ainsi de suite pour les points suivants).



Q10

2. À $t = T/2$, le signe des sinus a changé (mais la norme reste la même) . Il suffit donc d'inverser toutes les flèches.



Q11

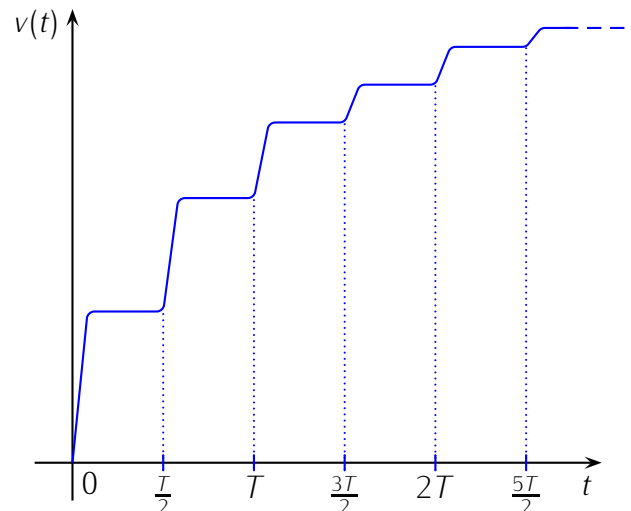
3. (a) Il faut que lorsque l'on parcourt un tube la tension change de sens pour accélérer la particule à nouveau au maximum. Soit il faut que le temps de parcours d'un tube soit un nombre demi-entier fois la période du signal $t_i = (n + \frac{1}{2}) T$. (Le plus naturel étant $\boxed{t_i = T/2}$ pour avoir un dispositif de dimension le plus faible possible).

- (b) Il y a une augmentation brusque de la vitesse à chaque passage entre deux tubes.

Chaque augmentation correspond au passage au niveau d'un point B_i : B_0 en $t = 0$, B_1 en $t = T/2$ etc...

Les points importants à bien représenter sont les suivants :

- l'augmentation de la vitesse se fait pendant un temps **très bref**,
- les passages se font à **intervalles de temps constant** : $T/2$;
- l'augmentation de l'énergie cinétique est la même à chaque tube, l'augmentation de vitesse est donc elle **de plus en plus faible**. (La vitesse croît comme $\sqrt{i}$, voir remarque ci-dessous).
- Entre temps, le proton n'est soumis à aucune force et son mouvement se fait donc à vitesse **constante**.



Q12

- (c) Il faut que la longueur des tubes soient adaptés à la vitesse des particules de façons à ce que le temps de parcourt d'un tube soit toujours $T/2$. Ainsi, $\boxed{L_i = v_i \frac{T}{2}}$.

Q13

(On aurait pu mettre un demi-entier fois T , mais je ne pense pas que l'énoncé l'attendait).

Remarque : on pourrait tout à fait déterminer la longueur optimale pour chaque tube : $E_{c,i} = i \times e \times U_c$ si la phase ϕ est telle que l'accélération est optimale. d'où $v_i = \sqrt{\frac{2 \times i \times e \times U_c}{m}}$. On en

$$\text{d\'eduit : } L_i = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{2 \times i \times e \times U_c}{m}} = T \sqrt{\frac{i \times e \times U_c}{2m}}$$

- Q14 (d) $L_i \simeq cT/2 = c/(2f) = 3 \times 10^8 / (2 \times 10^7) = \boxed{15 \text{ m}}$. On voit donc que la dimension du système peut devenir assez grande avec ce type d'accélérateur (puisque il faut plusieurs tubes).

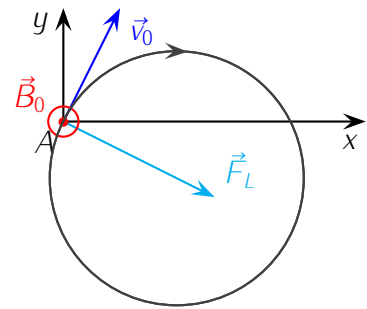
Remarque : il était demandé dans l'énoncé original pourquoi un tel accélérateur provoque un regroupement des particules par paquet : les particules ne sont accélérées de façons optimales que si elles arrivent au bon instant (proche du maximum du cosinus), le reste du temps, les particules n'ont pas la bonne vitesse pour avoir un temps de passage de $T/2$ et ne ressortent pas car elles sont parfois accélérées parfois freinées. On a donc un regroupement en paquets avec une période égale à la période du signal du GBF.

C. Du linac 2 au synchrotron à protons (PS)

- Q15 1. La force est la partie magnétique de la force de Lorentz. $\boxed{\vec{F}_L = e\vec{v}(t) \wedge \vec{B}_0}$.
Attention à ne pas mettre $\vec{v}_0$, mais bien $\vec{v}(t)$: lorsque la vitesse change, alors la force change elle aussi !

2. La force est orthogonale à $\vec{v}$ et $\vec{B}_0$.
Puisque $e > 0$, la force est dans le sens du produit vectoriel (règle de la main droite).
La norme de la force en A est $F_L = ev_0 B_0 \sin(\pi/2) =$

- Q16 $\boxed{ev_0 B_0}$.
Le cercle correspond à la question 5 et représente la trajectoire. Elle doit être tangente à la vitesse en A, orientée dans le même sens et $\vec{F}_L$ doit pointer vers « l'intérieur de la courbure ».



3. Par définition, $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Or $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, donc par définition du produit vectoriel, $\vec{F} \perp \vec{B}$ et $\vec{F} \perp \vec{v}$. La dernière relation implique que $\vec{F} \cdot \vec{v} = \boxed{0}$. La puissance est nulle, donc le travail l'est aussi. Puisque l'on est dans un référentiel galiléen et que l'on étudie un point matériel, on peut utiliser le théorème de la puissance cinétique. On en déduit que $\frac{dE_c}{dt} = 0$, d'où $E_c = cte \Rightarrow \boxed{v = cte'}$.

- Q17 Le mouvement du proton est donc $\boxed{\text{uniforme}}$.

4. Il s'agit de projeter le PFD selon les 3 axes. Peu importe les conditions initiales pour cette question. Le système est un point matériel, le référentiel est galiléen, d'après le PFD $m\vec{a} = e\vec{v} \wedge \vec{B}_0 \Leftrightarrow m(\dot{v}_x \vec{e}_x + \dot{v}_y \vec{e}_y + \dot{v}_z \vec{e}_z) = e(v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z) \wedge B_0 \vec{e}_z = eB_0(-v_x \vec{e}_y + v_y \vec{e}_x)$.

- Q18 Soit en projetant :

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = eB_0 v_y \\ m\dot{v}_y = -eB_0 v_x \\ m\dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

Attention à ne pas oublier les constantes (m, e, B_0).

5. On a montré que le mouvement était uniforme, l'énoncé nous indique qu'il est circulaire. On peut donc utiliser l'expression de l'accélération pour un mouvement circulaire uniforme : $\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire vers le centre de la trajectoire. En prenant la norme du PFD, on en déduit : $m\vec{a} = |e|\vec{v} \wedge \vec{B}_0 \Leftrightarrow m \frac{v^2}{R} = e v B_0 \sin(\vec{v}, \vec{B}_0)$. Le sinus de l'angle vaut 1 car le mouvement se fait dans le plan orthogonal à $\vec{B}_0$, on a donc à chaque instant $\vec{v} \perp \vec{B}_0$, de plus, d'après la question

- Q19 3, $v = cte = v_0$, d'où $m \frac{v_0^2}{R} = e v_0 B_0 \Rightarrow \boxed{R = \frac{m v_0}{e B_0}}$.

La trajectoire est représentée sur la figure de la question 2. Elle doit, passer par le point A, être un cercle, $\vec{v}_0$ est tangent à la trajectoire, $\vec{F}_L$ pointe vers l'intérieur de la trajectoire.

D. Rayonnement synchrotron dans le LHC

1. Le plus simple est sans doute l'expression de la force. L'énoncé suggérait initialement d'utiliser l'énergie stockée $E = \frac{Q^2}{2C}$ dans un condensateur pour déterminer une puissance en fonction d'une charge, d'une capacité et d'une durée. Il faut ensuite relier une capacité à ϵ_0 en utilisant l'unité de ϵ_0 .

Q20 En norme : $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$, soit dimensionnellement $M.L.T^{-2} = \left[\frac{q^2}{\epsilon_0} \right] \frac{1}{L^2} \Rightarrow \boxed{\left[\frac{q^2}{\epsilon_0} \right] = M.L^3.T^{-2}}$.

2. Il faut la dimension d'une puissance, elle peut se déterminer en se rappelant que $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ soit $[P] = M.L^2.T^{-3}$.

Q21 L'énoncé donne la formule $P = K c \frac{q^2}{\epsilon_0} r^\alpha$, soit en prenant les dimensions :

$$M.L^2.T^{-3} = 1 \times L.T^{-1} \times M.L^3.T^{-2} \times L^\alpha \Leftrightarrow L^2 = L^{4+\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

FRACTIONNEMENT DU CARBONE

1. Sans prendre en compte l'agitation thermique, l'atome, immobile à l'équilibre, est situé aux minima locaux de l'énergie potentielle (position d'équilibre stable d'après la mécanique classique). Ici, le seul minimum de E_p est pour $x = x_0$. Au repos, l'atome une énergie cinétique nulle. Son énergie vaut donc $E = 0$.
2. En mécanique quantique, l'atome n'est pas un corpuscule localisable à tout moment : c'est une entité quantique décrite par une fonction d'onde. À ce titre, il peut se trouver potentiellement à plusieurs endroits en même temps (plus précisément, il se trouve dans un état pour lequel une mesure de sa position peut donner différents résultats). L'atome doit vérifier (entre autres) l'inégalité de Heisenberg spatiale

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

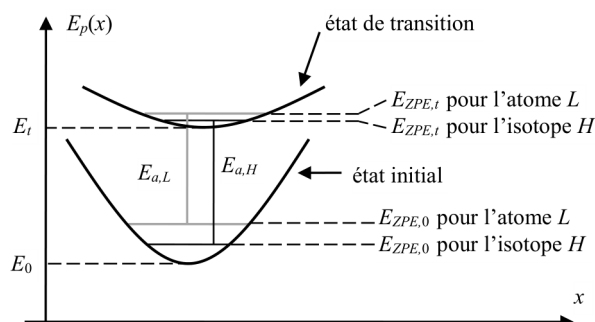
On voit donc que l'atome ne peut pas rester immobile, même dans son état de plus basse énergie. En effet, l'immobilité de l'atome impliquerait que $p_x = 0$ et donc $\Delta p_x = 0$ (la quantité de mouvement est nulle, donc de valeur parfaitement connue) ce qui signifierait que $\Delta x = +\infty$, c'est-à-dire que l'atome peut se trouver partout dans l'espace. Il ne peut donc pas rester localisé en $x = x_0$.

3. Puisque $(\Delta p_x)^2 = \langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle$ et que $\langle p_x \rangle = 0$ dans la mesure où l'atome doit en moyenne rester sur place (car piégé dans la cuvette), on a l'égalité $\langle p_x^2 \rangle = (\Delta p_x)^2$. Puisque l'énergie potentielle est symétrique par rapport à x_0 , on s'attend à ce que la position moyenne de l'atome soit en x_0 , soit $\langle x \rangle = x_0$.
4. Selon la mécanique classique, l'énergie mécanique de l'atome s'écrit $E = E_c + E_p = \frac{p_x^2}{2m} + E_0 + \frac{1}{2}K_0(x - x_0)^2$. On raisonne sur un état stationnaire de l'atome d'énergie E et l'on effectue une moyenne sur les différentes valeurs possibles de la position x et de la quantité de mouvement p_x : $E = \langle E \rangle = \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} + E_0 + \frac{1}{2}K_0 \langle (x - x_0)^2 \rangle$. Or, $\langle (x - x_0)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = (\Delta x)^2$ et $\langle p_x^2 \rangle = (\Delta p_x)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4(\Delta x)^2}$, d'où $E \geq E_{\min}$ avec $E_{\min} = \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + E_0 + \frac{1}{2}K_0(\Delta x)^2$.
5. On étudie les variations de $E_{\min}$ en fonction de Δx : $\frac{dE_{\min}}{d(\Delta x)} = \frac{-\hbar^2}{4m(\Delta x)^3} + K_0\Delta x$. La dérivée est nulle pour $\Delta x_f = \left(\frac{\hbar^2}{4mK_0}\right)^{1/4}$. Puisque $\frac{d^2E_{\min}}{d(\Delta x)^2} = \frac{3\hbar^2}{4m(\Delta x)^4} + K_0 = 4K_0 > 0$, $E_{\min}$ est minimal pour $\Delta x = \Delta x_f$ et vaut $E_{ZPE,0} = \frac{\hbar^2}{8m\sqrt{\frac{\hbar^2}{4mK_0}}} + E_0 + \frac{1}{2}K_0\sqrt{\frac{\hbar^2}{4mK_0}}$, soit $E_{ZPE,0} = E_0 + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{K_0}{m}}$. On a donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{m}}$. La quantité ω_0 représente la pulsation des oscillations de l'atome dans le puits de potentiel harmonique. En effet, en mécanique classique, la force que subit l'atome s'écrit $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(E_p) = -K_0(x - x_0)\vec{u}_x$. La loi de la quantité de mouvement appliquée à l'atome et projetée sur Ox s'écrit $m\ddot{x} = -K_0(x - x_0)$, qui est bien l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 .
Attention : on a simplement montré que l'énergie de l'état fondamental de l'atome (celui de plus basse énergie) doit être nécessairement plus grande que $E_{ZPE,0}$, mais cela ne veut pas forcément dire qu'elle est égale à $E_{ZPE,0}$. En fait, la résolution de l'équation de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique montre que $E_{ZPE,0}$ est bien l'énergie de l'état fondamental.
6. Du fait de son confinement imposé par son environnement, un atome possède une énergie dans son état fondamental dépendant de sa masse m . En effet, dans l'état initial, l'atome, plongé dans un puits parabolique de potentiel minimal E_0 et de constante de raideur équivalente K_0 , possède

une énergie du point zéro $E_{ZPE,0} = E_0 + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{K_0}{m}}$. Cette énergie est une fonction décroissante de la masse. Ainsi, pour un même environnement, un atome de masse m_L possède une énergie du point zéro inférieure à celle de l'un de ses isotopes plus massif $m_H > m_L$. Il en est de même dans l'état de transition pour lequel $E_{ZPE,t} = E_t + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{K_t}{m}}$.

7. Voir schéma

8. Voir schéma



9. Sauf dans le cas particulier où $K_t = K_0$, on voit donc que l'énergie d'activation, qui est la différence des énergies du point zéro entre l'état de transition et l'état initial, dépend de la masse de l'atome : il y a donc bien un effet isotopique cinétique.
10. La plupart du temps, dans l'état de transition, l'atome subit des forces de liaison moins importantes. Cela signifie que $K_t < K_0$. La différence entre les énergies du point zéro entre l'atome L et son isotope H est donc moins importante dans l'état de transition que dans l'état initial. On en déduit que $E_{a,L} < E_{a,H}$.
11. D'après la loi d'Arrhenius, la constante de vitesse k est une fonction décroissante de l'énergie d'activation. On obtient donc $k_L > k_H$, c'est-à-dire $K/E > 1$. Dans la majorité des cas, l'effet isotopique cinétique est plus grand que 1, d'où le qualificatif « normal » quand c'est effectivement le cas.
12. Si l'on note x l'abscisse de l'atome C en prenant pour origine le milieu des deux atomes O, l'atome C subit de la part des deux atomes O supposés fixes une force de rappel totale $F = -2Kxu_x$. On a donc ici $K_0 = 2K$. La résonance de la vibration se produit quand la pulsation ω des oscillations du champ électromagnétique du rayonnement infrarouge est égale (en fait très proche) à la pulsation propre de vibration de la molécule, valant ici $\omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{m_C}}$ en négligeant le mouvement des atomes O. Puisque $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$, on en déduit que $\sqrt{\frac{2K}{m_C}} = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$.
13. Avec un seul ressort, la force de rappel vaut $\vec{F} = -Kx\vec{u}_x$: $K_t = K$, d'où $K_t = \frac{K_0}{2}$.
14. L'écart d'énergie entre le niveau fondamental et le premier état excité de vibration de la molécule de CO_2 vaut $\Delta E = \frac{3}{2}\hbar\omega_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega_0 = \hbar\omega_0 = \frac{\hbar c}{\lambda_0}$ (pour le mode d'élongation antisymétrique). Pour l'état de transition, cet écart est plus faible et vaut $\hbar\omega_1 = \hbar\sqrt{\frac{K_t}{m}} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2}\lambda_0} = 3.10^{-20} \text{ J}$. On sait que l'agitation thermique peut fournir à la molécule une énergie de l'ordre de $k_B T$, valant 4.10^{-21} J à température ambiante (290 K), valeur insuffisante pour pouvoir exciter le premier état excité de vibration de l'atome C : on peut donc bien considérer que celui-ci reste dans son état fondamental pendant la réaction.
- Ici, l'atome léger est $L = {}^{12}\text{C}$ et l'isotope plus lourd est $H = {}^{13}\text{C}$. L'énergie d'activation de la réaction de carboxylation pour ${}^{12}\text{CO}_2$ vaut :

$$E_{a,L} = E_{ZPE,t,L} - E_{ZPE,0,L} = E_t + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{K_t}{m_L}} - \left(E_0 + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{K_0}{m_L}} \right) = E_t - E_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{K_0}{m_L}}$$

De même, celle pour $^{13}\text{CO}_2$ vaut $E_{a,H} = E_{ZPE,t,H} - E_{ZPE,0,H} = E_t - E_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{K_0}{m_H}}$. La différence d'énergie d'activation entre $^{12}\text{CO}_2$ et $^{13}\text{CO}_2$ vaut donc : $E_{a,H} - E_{a,L} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{m_L}{m_H}}\right) \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{K_0}{m_L}}$. En considérant que les neutrons et les protons ont environ la même masse, $\frac{m_L}{m_H} \approx \frac{12}{13}$. Le pic d'absorption à $\lambda_0 = 4,3\mu\text{m}$ correspond à $^{12}\text{CO}_2$ (l'isotope ^{12}C représentant 99% du carbone), d'où $\hbar \sqrt{\frac{K_0}{m_L}} = \frac{hc}{\lambda_0}$. On obtient bien

$$KIE = \frac{k_L}{k_H} = \exp\left(\frac{E_{a,H} - E_{a,L}}{k_B T}\right) = \exp\left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{12}{13}}\right) \frac{hc}{2\lambda_0 k_B T}\right)$$

15. Pour $T = 290\text{K}$, on trouve $KIE = 1,06$. Pour les plantes de type C3, le modèle prévoit que la proportion de ^{13}C dans la matière végétale est environ 6 % plus faible que dans le CO_2 initial. L'écart est en réalité autour de 2% . On trouve le bon ordre de grandeur, mais pas la valeur exacte, ce qui n'est pas étonnant compte tenu de la grande simplicité du modèle utilisé, celui-ci comportant de nombreuses approximations. Par exemple, négliger le mouvement des atomes O pour la vibration de la molécule de CO_2 est très critiquable.