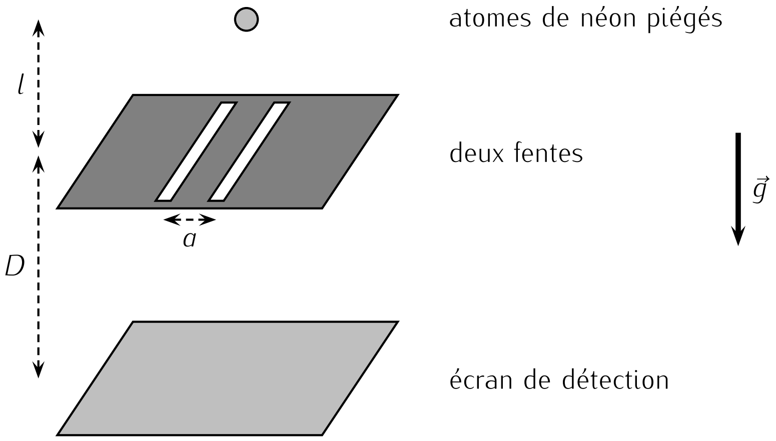
Expérience de Shimizu et Takuma

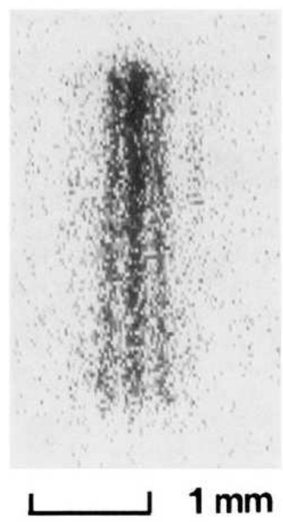
On donne :

- $h = 6{,}64.10^{-34}$ J.s la constante de Planck,
- $\mathcal{N}_A = 6{,}0.10^{23}$ mol^{-1} le nombre d'Avogadro,
- $e = 1{,}6.10^{-19}$ C la charge d'un électron,
- $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg la masse de l'électron,
- $M = 20$ g.mol^{-1} la masse molaire du néon,
- $g = 9{,}8$ m.s^{-2} l'accélération de la pesanteur.

Des expériences d'interférences atomiques ont été réalisées avec succès en 1992 par l'équipe de Shimizu et Takuma. Le dispositif, schématisé ci-dessous, utilise des atomes de néon piégés et refroidis à une température de 2,5 mK de manière à minimiser leur agitation thermique moyenne. Ils sont portés dans un état métastable grâce à un laser à 598 nm, ils peuvent alors quitter le piège et tombent dans le champ de pesanteur.

Le piège est situé à une hauteur $l = 76$ mm au dessus de deux fentes séparées d'une distance $a = 6$ μm. La largeur d'une fente est de 2 μm. Un détecteur est placé à une distance $D = 113$ mm de la double fente et détecte les atomes de néon avec une résolution de l'ordre de 20 μm. L'ensemble du dispositif est disposé verticalement.





La figure d'interférence (ci-dessus à droite) obtenue en libérant les atomes du piège est constituée d'environ 6000 impacts atomiques. L'ensemble des impacts dessine des franges d'interférences dont la période spatiale appelée interfrange est égale à $i = 0{,}23$ mm (seul le tiers inférieur de la figure est à regarder, les deux tiers du haut ne sont pas pertinents car les fentes utilisées étaient abîmées.).

Q1 1. En quoi cette expérience met-elle en évidence le caractère corpusculaire et le caractère ondulatoire de la matière ?

Q2 2. En considérant une approche classique, montrez que la vitesse des atomes de néon au niveau des deux fentes est $v \simeq 1{,}2$ m.s^{-1}. On étudiera une chute libre sans vitesse initiale.

Q3 3. Pourquoi les atomes sont-ils refroidis à si basses températures ? Pour ces atomes, quel a été l'autre critère de choix qui influe dans le même sens ?

Q4 4. En déduire la longueur d'onde de de Broglie λ_B associée à ces atomes.

Q5 5. L'expression de l'interfrange i associée aux fentes d'Young est $i = \frac{\lambda D}{a}$. En déduire la longueur d'onde λ associée à la particule. Commenter.

Oscillateur quantique

Un oscillateur harmonique quantique à une dimension possède une énergie :

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$$

1. Analogies avec la mécanique classique :
   Q6 (a) Pour chacun des termes de l'énergie de l'oscillateur harmonique quantique, expliquer le lien avec l'oscillateur harmonique classique.
   Q7 (b) Montrer que l'énergie de l'oscillateur harmonique classique est constante.
2. On admet que $\langle x \rangle = 0$ et $\langle p_x \rangle = 0$ puisque l'oscillateur oscille symétriquement autour de sa position d'équilibre $x = 0$.
   Q8 (a) En déduire l'expression de $\langle E \rangle$ en fonction de Δx et Δp_x.
   On rappelle que l'écart-type Δx est défini par $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$.
   Q9 (b) L'écrire sous la forme $\langle E \rangle \geq f(u)$ où $f(u)$ est une fonction ne dépendant que de $\hbar$, $u = \Delta x$, m et ω_0.
3. Q10 En déduire que $\langle E \rangle \geq E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$. Commenter ce résultat.

Ondes de matière

1. Q11 D'une part, le fait d'observer des impacts ponctuels confirme le caractère corpusculaire. D'autre part, la présence de franges traduit un phénomène d'interférences qui ne peut s'expliquer que par le caractère ondulatoire de la lumière.
2. Q12 On considère une chute libre sans vitesse initiale. Le système est un électron dans le référentiel galiléen du laboratoire, uniquement soumis à son poids. On prend un axe Oz vers le bas avec origine dans le piège. L'application du principe fondamental de la dynamique donne :

   $$\ddot{z} = g \Rightarrow v = \dot{z} = gt \Rightarrow z = \frac{1}{2}gt^2$$

   L'atome parcours une distance l (jusqu'aux fentes) en $t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}}$.

   On a alors $\boxed{v(t_1) = v_s = \sqrt{2gl}}$.

   A.N. $\boxed{v_s = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 76.10^{-3}} = 1{,}2 \text{ m.s}^{-1}}$.

   On pouvait aussi utiliser la conservation de l'énergie mécanique : $E_{m,i} = E_{m,f} \Rightarrow mgl + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_f^2$ et on en déduit le même résultat.
3. Q13 Les atomes sont refroidis à si basses températures pour diminuer leur agitation thermique et ainsi leur vitesse moyenne et leur quantité de mouvement. Ainsi leur longueur d'onde de Broglie n'est pas trop petite et permet d'observer des interférences avec les tailles du dispositif. Nous verrons plus tard en thermodynamique que la vitesse moyenne est liée à la température par la relation : $v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$.

   L'autre critère peut-être la masse des atomes : il se peut qu'on ait choisi des atomes assez légers pour augmenter la longueur d'onde de Broglie.
4. Q14 On utilise la relation $\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_{néon}v} = \frac{h\mathcal{N}_A}{M_{néon}v}$

   A.N. $\boxed{\lambda_B = \frac{6{,}64.10^{-34} \times 6{,}0.10^{23}}{20.10^{-3} \times 1{,}2} = 1{,}7.10^{-8} \text{ m}}$.
5. Q15 On calcule $\lambda = \frac{ai}{D}$.

   A.N $\boxed{\lambda = \frac{6.10^{-6} \times 0{,}23.10^{-3}}{113.10^{-3}} = 1{,}2.10^{-8} \text{ m}}$.

On trouve un accord avec la longueur d'onde de de Broglie évaluée précédemment bien que cela ne coincide pas parfaitement (cf remarque ci-dessous).

Remarque : La longueur d'onde de de Broglie a été évaluée avec la vitesse au niveau des deux fentes. Or les atomes continuent leur accélération et la longueur d'onde varie avec l'altitude.

Si on évalue la vitesse au niveau de l'écran, on trouve $v = \sqrt{2g(l+D)} = 1{,}9$ m.s^{-1}. L'ordre de grandeur reste le même, on peut estimer que la longueur d'onde de de Broglie varie peu. Par contre, si on demandait de calculer la valeur précise de l'interfrange, il faudrait prendre en compte toute la variation de λ_B au cours du mouvement.

Oscillateur quantique

1. (a) Q16 On peut par exemple modéliser un système masse-ressort horizontal sans frottements par un oscillateur harmonique classique. Son énergie est $E_m = E_c + E_P$ où $E_c = \frac{1}{2}mv_x^2$ et $E_P = \frac{1}{2}kx^2$ en posant $x = l - l_0$ et k la constante du ressort.

   Puisque la pulsation propre vérifie $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, on peut remplacer k dans l'expression de l'énergie potentille $k = m\omega_0^2$. De même, puisque par définition $p_x = mv_x$, alors $v_x^2 = \frac{p_x^2}{m^2}$. On retrouve bien une expression analogue à celle de l'énoncé : $E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$ où le premier terme représente donc l'énergie cinétique et le deuxième l'énergie potentielle.

   (b) Q17 Pour l'OH, on peut prendre une solution de la forme $x(t) = X_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$.
   D'où $v(t) = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Calculons E_m : $E_m = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kX_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2$ en utilisant $k = m\omega_0^2$.
   On a bien retrouvé que l'énergie mécanique de l'OH était constante.

   Remarque : on pouvait également intégrer l'équation du mouvement par rapport au temps, ou dériver l'expression de l'énergie mécanique pour montrer grâce au PFD que $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$.

2. (a) L'énoncé nous donne $\langle x \rangle = 0$ et $\langle p_x \rangle = 0$. On en déduit : $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ et de même
   Q18 $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle}$. D'où : $\langle E \rangle = \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle$ $\boxed{\Rightarrow \langle E \rangle = E = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(\Delta x)^2}$

   (b) Le principe d'incertitude de Heisenberg s'écrit : $\Delta p_x \Delta_x \geq \frac{\hbar}{2}$ d'où :
   Q19 $E \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(\Delta x)^2 \;\Rightarrow E \geq f(u)$ avec $\boxed{f(u) = \frac{\hbar^2}{8mu^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 u^2}$ et $u = \Delta x$.

3. Calculons la dérivée de la fonction : $f'(u) = m\omega_0^2 u - \frac{\hbar^2}{4mu^3}$
   Q20 $f'(u_0) = 0 \Leftrightarrow m\omega_0^2 u_0 = \frac{\hbar^2}{4mu_0^3} \Leftrightarrow u_0^4 = \frac{\hbar^2}{4m^2\omega_0^2} \Leftrightarrow u_0^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$ (inutile de regarder u_0 puisque seul u^2 apparait dans notre formule.)
   Pour montrer que c'est un minimum, on peut : soit tracer la fonction, soit étudier ses limites en 0 et $+\infty$ qui valent toutes les deux $+\infty$, soit calculer sa dérivée seconde en u_0 et vérifier qu'elle est strictement positive.
   Finalement : $E \geq f(u) \geq f(u_0) = \frac{\hbar^2}{4m}\frac{m\omega_0}{\hbar} + \frac{1}{4}m\omega_0^2\frac{\hbar}{m\omega_0}$ $\boxed{\Rightarrow E \geq \hbar\frac{\omega_0}{2}}$
   L'énergie minimale est non nulle contrairement à celle d'un oscillateur harmonique classique. Cette différence fondamentale vient de l'inégalité d'Heisenberg qui « empêche » une particule d'être parfaitement immobile à une position fixée.