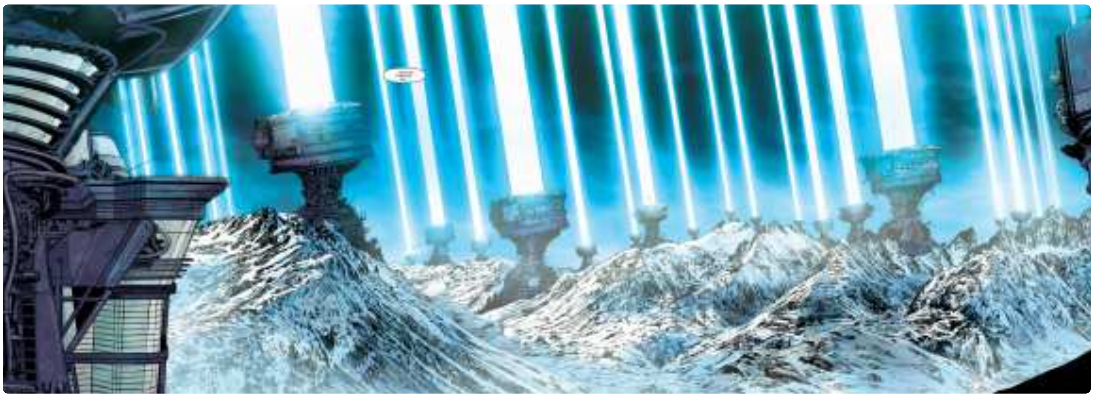
Terre errante

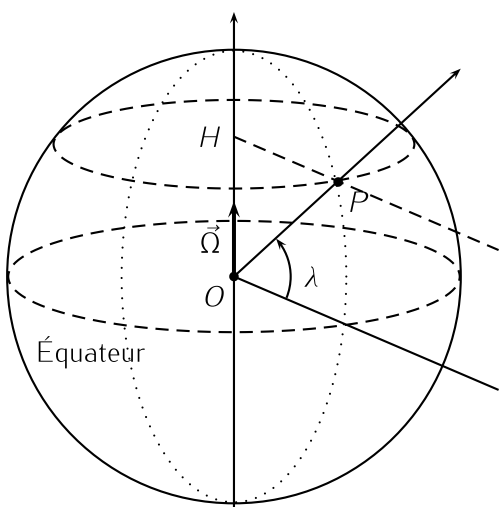
La nouvelle *Terre errante* de l'auteur Liu Cixin évoque l'hypothèse que le Soleil risque d'exploser et de devenir une supernova à moyen terme. Face au risque, l'humanité décide d'instituer un gouvernement mondial puis de modifier la trajectoire de la planète de façon à la diriger vers l'étoile la plus proche, Proxima du Centaure. La tâche est ardue et prend plusieurs siècles d'efforts. La nouvelle commence au moment de l'opération consistant à freiner la planète sur sa trajectoire pour la propulser vers Proxima du Centaure, et se termine lorsqu'elle quitte le système solaire, au moment où le Soleil devient effectivement une supernova. L'auteur prend, comme témoin des événements qui se déroulent sur Terre, un Chinois, dont on suit la vie depuis son enfance (lorsque la Terre est freinée de sa trajectoire) jusqu'à son grand âge (lorsque la Terre quitte le système solaire).

1 L'ère du freinage

Le premier chapitre détaille le freinage de la rotation de la Terre autour de son axe Nord-Sud. Au total, 12 000 propulseurs sont installés dans les plaines américaines et asiatiques. Chaque engin émet un gigantesque jet de plasma qui exerce en retour une force $\vec{F}$ sur la Terre et colinéaire au jet.



On modélise la Terre par une sphère homogène de rayon $R_T = 6400$ km et de masse $M = 6.10^{24}$ kg dans le référentiel géocentrique galiléen. Elle tourne à la vitesse angulaire $\Omega > 0$ autour de l'axe des pôles supposé fixe dans le référentiel d'étude. Tous les propulseurs sont installés sur le 45ième parallèle, *i.e.* $\lambda = 45°$ (voir le schéma ci-après).



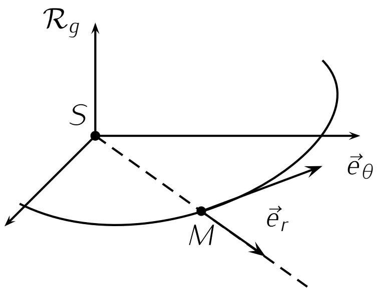
1. On repère la position d'un propulseur P par ses **coordonées cylindriques** d'axe (Oz) l'axe Sud-Nord. En supposant que la force $\vec{F}$ soit horizontale et orientée selon l'axe Est-Ouest (c'est-à-dire selon $-\vec{e}_\theta$). Faire un schéma. Que vaut la distance HP ?

2. Montrer que le moment du couple exercé par les $N = 12000$ propulseurs autour de l'axe (Oz) des pôles vaut $\gamma = -\frac{N}{\sqrt{2}} R_T F$.
3. Le moment d'inertie de la Terre autour de son axe de rotation est $J = \frac{2}{5} M R_T^2$. Appliquer le théorème du moment cinétique à la Terre.
4. Avant l'allumage des moteurs, la Terre possède une période de rotation T_S =23h 56min 4s. Montrer que la Terre ne tourne plus sur elle-même à l'instant T telle que
$$\frac{2\pi}{T_S} = \frac{N}{\sqrt{2}} \frac{R_T F}{J} T$$
5. Dans le récit, il est dit que l'humanité met 250 ans pour stopper la rotation de la Terre. En déduire que chaque propulseur exerce une force d'environ 17.10^{12} N.
6. Il est également précisé qu'un propulseur exerce une poussée de quinze milliards de tonnes.
   (a) Convertir cette donnée en Newton.
   (b) En déduire que les réacteurs ne sont pas horizontaux mais inclinés comme sur l'illustration.
   (c) Donner l'expression l'angle α que fait un propulseur avec le vecteur $\vec{e}_r$. Faire l'application numérique, comparer avec l'illustration et commenter.

2 L'ère de la fuite

À la fin de l'ère du freinage, la Terre ne tourne plus sur elle-même, mais elle décrit toujours une orbite circulaire autour du Soleil de masse $M_S = 2.10^{30}$ kg à la distance $R_0 = 150.10^6$ km. On rappelle que la constante de gravitation vaut $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}

1. Justifier que lorsqu'on étudie le mouvement de la Terre autour du Soleil, celle-ci peut-être assimilée à un point matériel.
2. On repère à nouveau la Terre à l'aide des coordonnées cylindriques, mais cette fois-ci, de centre S, le Soleil.



   On rappelle que le Soleil exerce une force $\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{MM_S}{r^2}\vec{e}_r$ sur la Terre. Montrer que le moment cinétique de la Terre autour du Soleil est constant. En déduire que le produit $r^2\dot{\theta}$ est une constante que l'on notera C.
3. Expliquer pourquoi le mouvement de la Terre est plan.
4. La force $\vec{F}$ est-elle conservative ? Si oui, donner l'expression de l'énergie potentielle associée.
5. Exprimer l'energie mécanique de la Terre sous la forme $E_m = E_{p,eff} + \frac{1}{2}M\dot{r}^2$, où $E_{p,eff}$ ne dépend que de la variable r.
6. Tracer l'allure de $E_{p,eff}$ en fonction de r. Pour quelles valeurs de E_m la Terre possède-t-elle un mouvement lié ?
7. Montrer que dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon R_0 la vitesse de la Terre est $v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R_0}}$. Faire l'application numérique.
8. Toujours dans le cas d'un mouvement circulaire, montrer que $E_m = -\frac{\mathcal{G}M_S M}{2R_0}$.

9. En supposant que la vitesse de la Terre passe subitement de v_0 à v, quelle doit être la variation minimale de vitesse $\Delta v = v - v_0$ pour que celle-ci se trouve dans un état de diffusion ?
10. L'accélération subie par la Terre lors de ce processus vaut, en ordre de grandeur, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, avec $\Delta t = 1$ jour. En déduire la force que doivent exercer les propulseurs sur la Terre et montrer que ce n'est pas compatible avec la valeur fournie au chapitre précédent.
11. Effectivement, on lit au début de ce chapitre « *Contrairement à ce que tu imagines peut-être, les propulseurs terrestres ne sont pas si puissants que ça. Ils ne sont capables de produire qu'une petite accélération, ils ne peuvent pas exercer une poussée suffisante pour projeter la Terre hors de l'orbite solaire. Avant de pouvoir fuir le Soleil, la Terre va tourner encore quinze fois sur son orbite ! Et c'est pendant ces quinze révolutions qu'elle va progressivement prendre de la vitesse. Aujourd'hui quand la Terre tourne autour du Soleil, elle fait presque un cercle parfait, mais au fur et à mesure de son accélération, ce cercle va se distordre, de plus en plus...* ».

   On fait l'hypothèse que les propulseurs fournissent une puissance $\mathcal{P} = 7.10^{17}$ W constante à la Terre, ainsi

   $$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}$$

   Comme les propulseurs ont une influence minime sur le mouvement de la Terre, on peut supposer que la relation $E_m(t) = -\frac{\mathcal{G}M_S M}{2a(t)}$, où a est le demi-grand axe de la trajectoire, reste valable [1]. Montrer que

   $$a(t) = \frac{R_0}{1 - \frac{R_0 \mathcal{P}}{\mathcal{G}M_S M} t}$$

12. Au bout de combien de temps la Terre aura-t-elle quitté l'orbite du Soleil ? Cette durée est-elle cohérente avec le récit ?

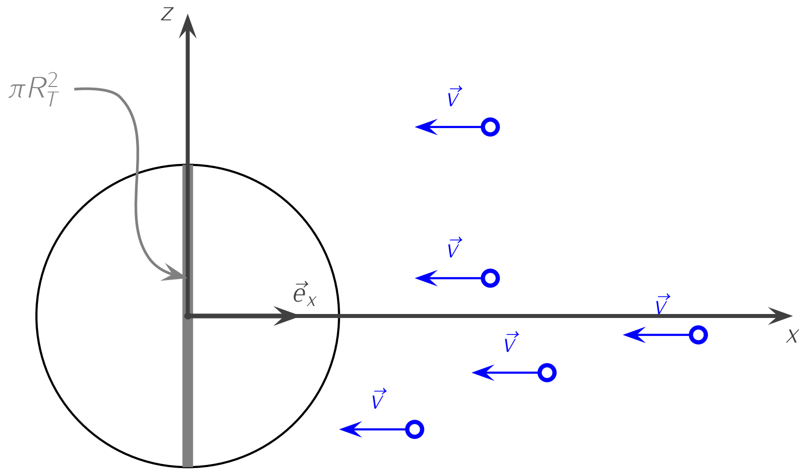
3 Ére de l'errance

Peu de temps après la mise en état de diffusion de la Terre, le Soleil explose et devient supernova, comme les astronomes l'avaient prévu quelques siècles auparavant. La Terre se dirige à vitesse constante vers Proxima du centaure située à 4,244 années lumière, elle l'atteindra dans 2500 ans.

1. À quelle vitesse v (en km/s) voyage la Terre ?
2. Au confin du système solaire se trouve un vaste ensemble sphérique constitué d'un grand nombre de petits corps, appelé le nuage d'Oort. Ce nuage a la forme d'une coquille sphérique centrée sur le Soleil et possède une épaisseur $e = 10^{13}$ km. Lorsque la Terre se déplace au sein du nuage d'Oort, les corps répartis aléatoirement entrent en collision avec notre planète. On suppose que tous ces corps ont une même vitesse relative, v, par rapport à la Terre. On peut se contenter d'un modèle à une dimension, et on supposera que toutes les particules du nuage d'Oort ont le même vecteur vitesse dans le référentiel lié à la Terre : $\vec{v} = -v\vec{e_x}$. On notera $n^\star$ le nombre de particules par unité de volume, on négligera leur taille par rapport à la taille de la Terre. De plus, on négligera les interactions gravitationnelles.

   Reproduire et compléter le schéma ci-dessous en représentant le volume contenant les corps entrant en collision avec la Terre entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

1. On fait ici ce que l'on appelle en physique un traitement perturbatif.



3. Combien de particules entrent en collision avec la Terre entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$? On exprimera $\mathrm{d}N_{coll}$ en fonction de $n^\star$, R_T (le rayon de la Terre), $\mathrm{d}t$ et v.
4. On suppose que les particules du nuage d'Oort ont une masse m, et que lors des collisions, elles se collent à la Terre. Quelle est la variation de quantité de mouvement d'une particule lors de son choc avec la Terre ?
5. Exprimer la force exercée par la Terre sur les particules entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.
6. Montrer que la force exercée par les particules sur la Terre s'apparente à une force de frottement fluide du type $\vec{f} = -\beta v^2 \vec{e}_x$.
7. On souhaite connaitre la vitesse de la Terre à la sortie du nuage d'Oort. On doit donc résoudre l'équation différentielle suivante :
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\beta v^2$$
avec $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. On souhaite résoudre ce système d'équation différentielle grâce à l'outil numérique via la méthode d'Euler. On rappelle qu'un développement de Taylor Young à l'ordre 1 donne :
$$v(t + \mathrm{d}t) = v(t) + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$
et
$$x(t + \mathrm{d}t) = x(t) + v\mathrm{d}t$$
Recopier et compléter le script ci-dessous pour trouver la valeur de la vitesse de la Terre à la sortie du nuage.
```
M = 6e24 #masse de la Terre en kg
beta = 1e7 #coeff de frottement en kg/m
x = 0    #position initiale de la Terre
dt = 10  #pas de temps en s
e = 1e13 #            du nuage en m

while ... :
    v = ... #calcul v(t+dt)
    x = ... #calcul de x(t+dt)
print(v)
```
8. On trouve une variation relative de vitesse de $1{,}7.10^{-3}\%$. De quelle durée est rallongée le voyage ?