

**Conseils :**

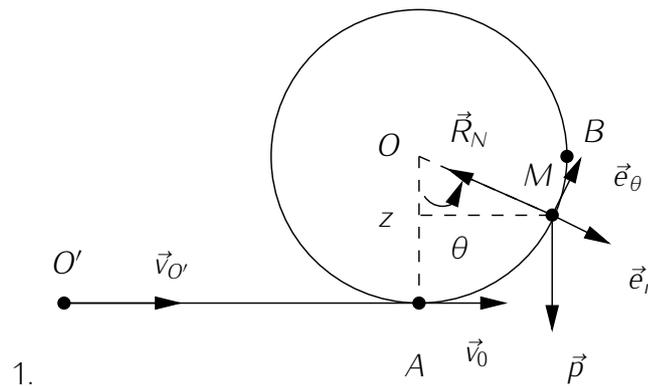
- Lisez attentivement l'énoncé du début à la fin et choisissez **ensuite** par quel problème commencer (aucun ordre n'est imposé).
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).

**Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés.** Laissez une marge à gauche pour le correcteur.

- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

## FERRÉOL AU SKI

1.  $v_0 = \sqrt{2gh}$
2.  $v_0 = 7,7 \text{ m/s}$
1.  $v'_0 = 12,3 \text{ m/s}$
2.  $p_F = 153 \text{ kg.m/s}$ .  $p_C = 0$
3.  $p_{tot} = p_F + p_C = Mv_0 = Mv_F + mv'_0$  avec  $v'_0 = \frac{2M}{m+M}v_0$
4.  $4,6 \text{ m/s}$



1. Le travail du poids est  $W = mgl(\cos(\theta) - 1) < 0$ . Il s'agit bien d'un travail résistant.

2. Par application du théorème de l'énergie cinétique sur la cible entre les positions  $B$  et  $M$ , on peut écrire

$$\Delta E_c = W(\vec{p}) + W(\vec{T})$$

or  $\vec{T}$  la réaction du fil est perpendiculaire au déplacement à tout instant, son travail est nul et le travail du poids a déjà été calculé. On a ainsi

$$\Delta E_c = W = -\Delta E_{p, \text{pes}} + 0 \iff \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = -mgR(1 - \cos \theta) \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta)$$

Q1 et si  $v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta) \geq 0$ , alors  $v = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta)}$

3. Principe fondamental de la dynamique : dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , la résultante des forces qui s'exercent sur un point matériel est égale à la dérivée temporelle du vecteur quantité de mouvement dans  $\mathcal{R}_g$ .

Et par application sur la cible, dans le système de coordonnées polaires,

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

On a par ailleurs  $\vec{p} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$  et  $\vec{T} = -T \vec{e}_r$ , soit :

$$m\vec{a} = \vec{p} + \vec{T} \Rightarrow -mR\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - T \iff T = mg \cos \theta + mR\dot{\theta}^2 \text{ par projection sur } (OM)$$

Et en utilisant  $v^2 = R^2\dot{\theta}^2 \iff \dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{R^2}[v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta)]$ , on obtient

$$T = mg \cos \theta - 2mg(1 - \cos \theta) + \frac{mv_0^2}{R} \Rightarrow \boxed{T = mg(3 \cos \theta - 2) + \frac{mv_0^2}{R}}$$

Q2

Q3

4. La cible effectue un tour complet si elle reste **toujours** en contact avec le rail ( $\forall \theta; T > 0$ ) **et** si sa vitesse est non nulle ( $v > 0$ ) tout au long du mouvement (deux conditions).

- $T$  est minimale pour  $\theta = \pi$  et

$$\forall \theta; T > 0 \iff T(\theta = \pi) > 0 \iff mg(-3 - 2) + \frac{mv_0^2}{R} > 0 \iff v_0^2 > 5gR \Rightarrow v_0 > \sqrt{5gR}$$

- De même,  $v$  est minimale pour  $\theta = \pi$  et

$$v(\theta = \pi) > 0 \iff -2gR(1 - \cos \pi) + v_0^2 > 0 \iff v_0^2 > 4gR \Rightarrow v_0 > 2\sqrt{gR}$$

Conclusion : il faut que  **$v_0 > \sqrt{5gR}$** .

Q4

5. Numériquement  $v_0 > 8,6$  m/s.

6. Le choc avec la cible n'est pas élastique. La cible est bien rembourrée et ça amortie le choc.

## MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE

D'après CCP PC 2014

### A. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

1. (a) Appliquons le théorème de la puissance cinétique à la particule dans  $\mathcal{R}$  galiléen :

$\frac{dE_c}{dt} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$ . L'énergie cinétique est donc constante. Comme la masse est supposée constante, on peut en déduire que la vitesse est constante.

Q5

Q6

- (b) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la particule dans  $\mathcal{R}$  galiléen :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \iff m \begin{vmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{vmatrix}$$

Soit en projection sur  $Oz$  :  $m\dot{z} = 0$ . Soit  $\dot{z} = cste = 0$  car  $v_{0z} = 0$  puis  $z = cste = 0$  car  $z_0 = 0$ . La trajectoire est donc plane.

Q7

- (c) Le mouvement est circulaire et uniforme. On peut donc écrire  $\vec{OM} = R\vec{e}_r$ ,  $\vec{v} = v_\theta\vec{e}_\theta$  et  $\vec{a} = -\frac{v_\theta^2}{R}\vec{e}_r$ . D'où :

$$-m\frac{v_0^2}{R}\vec{e}_r = q\vec{v} \wedge B\vec{e}_z \Rightarrow m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow m\frac{v_0^2}{R} = qvB$$

On a  $q\vec{v} \wedge \vec{B} = qvB$  car  $\vec{v}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux (et  $q > 0$ ). On obtient le rayon :  $R = \frac{mv_0}{qB}$ .

2. (a) Les ions doivent être accélérés entre  $P_1$  et  $P_2$ . Ils sont soumis à la seule force électrique entre  $P_1$  et  $P_2$ . Les particules ont tendance à descendre les énergies potentielles (pensez à une bille dans un jouet), puisque  $E_p = qV$  et que  $q > 0$ , les particules de charge positive ont tendance à descendre les potentiels électriques. Puisque l'on va de  $P_1$  vers  $P_2$ , c'est que  $V(P_2) < V(P_1)$ , d'où  $W = V_{P_1} - V_{P_2} < 0$ .

Q8

Q9

- (b) Si la particule de  $F_1$  avec une vitesse nulle, elle arrive en  $F_2$  avec la vitesse  $v_{U8}$  telle que, d'après le théorème de l'énergie mécanique,  $E_{m,2} - E_{m,1} = \mathcal{W}_{nc} = 0$  car seule la force électrostatique s'applique et elle est conservative. D'où  $E_{m,2} = E_{m,1} \iff E_{c,2} + qV(P_2) =$

$$E_{c,1} + qV(P_1) \simeq qV(P_1) \text{ d'où } \frac{1}{2}m_{U8}v_{U8}^2 = q(V_{P_1} - V_{P_2}) = -qW \Rightarrow v_{U8} = \sqrt{\frac{-2eW}{m_{U8}}}$$

- (c) Les deux isotopes partent du même point, la distance entre les collecteurs  $d$  est donc égale à la différence entre les deux diamètres des trajectoires :

$$d = D_{U8} - D_{U5} = 2(R_{U8} - R_{U5})$$

**Attention au facteur 2!, faite un schéma et représentez les rayons.**

En utilisant le lien entre la tension  $W$  et la valeur de vitesse en  $F_2$ , on obtient :

$$R_{U8} = \frac{mv_{U8}}{eB} = \sqrt{\frac{-2Wm_{U8}}{eB^2}} \text{ d'où}$$

Q10 
$$d = 2(R_{U8} - R_{U5}) = 2\sqrt{\frac{-2mW}{qB^2}}(\sqrt{m_{U8}} - \sqrt{m_{U5}}) \quad \text{d'où} \quad W = -\frac{qd^2B^2}{8(\sqrt{m_{U8}} - \sqrt{m_{U5}})^2}$$

A.N : 
$$W = -\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times (0,02)^2 \times 0,1^2}{8 \times 1,66 \cdot 10^{-27} (\sqrt{238} - \sqrt{235})^2} \quad \boxed{W = -5,1 \text{ kV}}$$

## B. Le cyclotron

Q11 1. La trajectoire circulaire de longueur  $L = \pi R$  (un demi-tour) est parcourue à la vitesse constante  $v = \frac{eBR}{m_P}$  (calculée ci-dessus) en un temps :

$$T_{1/2} = \frac{L}{v} = \frac{\pi R}{v} \quad \boxed{T_{1/2} = \frac{\pi m_P}{qB}}$$

Ce temps est indépendant du rayon. On peut donc en déduire que le temps pour effectuer un demi-tour est toujours le même.

Q12 2. On utilise une tension  $u(t)$  alternative sinusoïdale pour que le proton soit accéléré de manière optimale. En effet, il faut à chaque demi-tour changer le sens dans lequel on accélère la particule, d'où le fait de changer la tension de signe. De plus, on peut prendre un signal périodique car  $T_{1/2}$  est une constante (indépendante de la vitesse ou du rayon).

Q13 3. On a ainsi

$$\frac{T}{2} = T_{1/2} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2T_{1/2}} = \frac{eB}{2\pi m_P}$$

A.N.  $f = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,1}{2\pi \times 1,67 \cdot 10^{-27}} \quad \boxed{f = 1,5 \text{ MHz}}$

Q14 4. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est  $R_S$ . Or on avait  $v_S = \frac{eR_S B}{m_P}$  d'où

$$\boxed{E_{CS} = \frac{1}{2} m_P v_S^2 = \frac{e^2 R_S^2 B^2}{2m_P}}$$

A.N. :  $E_{CS} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,5 \times 0,1)^2}{2 \times 1,67 \cdot 10^{-27}} \quad \boxed{E_{CS} = 1,91 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 0,12 \text{ MeV}}$

Q15 5. Notons  $2N$  le nombre de demi-tours effectués (et donc le nombre d'accélération subies). A chaque accélération, le proton gagne :  $\Delta E_C = qU_m$  d'où  $\Delta E_{C,2N} = 2NqU_m = E_{CS}$  or  $E_{CS} = \frac{e^2 R_S^2 B^2}{2m_P}$

$$\boxed{N = \frac{eB^2 R_S^2}{2m_P U_m}}$$

A.N. :  $N = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,1^2 \times 0,5^2}{2 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times 10^5} = 1,2$  tour. Puisque l'on ne peut faire qu'un nombre entier ou demi-entier de tour et qu'au bout d'un tour la particule n'est pas encore sortie, alors on fait

Q16  $\boxed{1 \text{ tour et demi}}$  avant de sortir.

6. (a) Pour une trajectoire circulaire uniforme  $a = \frac{v^2}{R}$  d'où

$$\boxed{P_r = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \left(\frac{v^2}{R}\right)^2 = \alpha v^4 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c R^2}}$$

Q17 (b) L'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon est

$$E = P_r T_{1/2} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c R^2} \left(\frac{eBR_S}{m_P}\right)^4 \frac{\pi m_P}{eB} = \frac{\mu_0 e^5 B^3 R_S^2}{6cm_P^3}$$

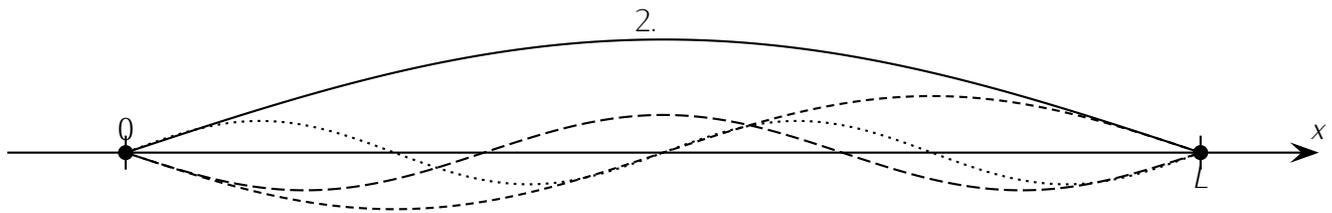
A.N. : Calculons  $E$  en eV :  $E = \frac{4\pi 10^{-7} (1,6 \cdot 10^{-19})^4 \times 0,1^3 \times 0,5^2}{6 \times 3 \cdot 10^8 \times (1,67 \cdot 10^{-27})^3} = 3,9 \cdot 10^{-33} \text{ J} = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ eV}$

Q18

- (c) Cette énergie rayonnée est négligeable devant l'énergie cinétique de la particule et il est donc raisonnable d'estimer que la perte par rayonnement est nulle, c'est à dire que l'énergie de la particule est constante à l'intérieur d'un "dee".

## DES COULEURS ÉLECTRONIQUES

1. Lorsqu'il est éclairé par de la lumière blanche, un composé apparaît de la couleur complémentaire à celle qui est absorbée. Ainsi la cyanine  $m = 1$  qui absorbe la lumière dans le bleu (à 416 nm) apparaît jaune-orange et la cyanine  $m = 4$  qui absorbe dans le rouge (à 643 nm) apparaît de couleur bleu-vert. De même, la cyanine  $m = 1$  qui absorbe à 416 nm apparaît de couleur bleu-vert. De même, la cyanine  $m = 2$  qui absorbe dans le vert (à 519 nm) apparaîtra magenta (bleu + rouge) et la cyanine  $m = 3$  qui absorbe dans le jaune (à 625 nm) sera plutôt violet. On pourra remarquer que la cyanine  $m = 0$  absorbe dans l'ultraviolet (à 313 nm) et reste parfaitement transparente dans le visible, ce qui rend ce composé incolore.



Les modes propres de la corde vibrante sont les ondes stationnaires possédant un nœud à chaque extrémité. Chaque mode propre possède un nombre entier de fuseaux sur la longueur  $L$  de la corde. La distance entre deux nœuds consécutifs vaut  $\lambda/2$ . Pour le mode propre  $n$ , on a donc la relation :

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

soit :

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

3. L'amplitude de l'onde de matière est en fait liée à la probabilité de présence de la particule dans l'espace. Les électrons étant confinés dans la molécule, ils ne peuvent pas sortir de la chaîne principale. La probabilité de présence aux extrémités de la chaîne est donc nulle. On retrouve les mêmes conditions aux limites que sur la corde fixée à ses extrémités, ce qui permet d'utiliser efficacement cette analogie.

Un électron de masse  $m_e$  possédant la quantité de mouvement  $\vec{p}$  se déplace à la vitesse  $\frac{\vec{p}}{m_e}$ . Son énergie cinétique s'écrit donc :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} m_e \left( \frac{p}{m_e} \right)^2 = \frac{p^2}{2m_e}$$

En identifiant la longueur d'onde de de Broglie de l'électron à la longueur d'onde du mode propre  $n$ , il vient :

$$\frac{h}{p} = \frac{2L}{n}$$

soit :

$$p = \frac{nh}{2L}$$

On en déduit l'énergie de l'électron dans le niveau  $n$  :

$$\mathcal{E}_n = \frac{n^2 h^2}{8m_e L^2}$$

(assimilée à son énergie cinétique si l'on considère que le potentiel est nul au fond du puits).

4. L'énergie des électrons varie avec  $n^2$  et les niveaux sont de plus en plus écartés. On peut les représenter sur le diagramme suivant :

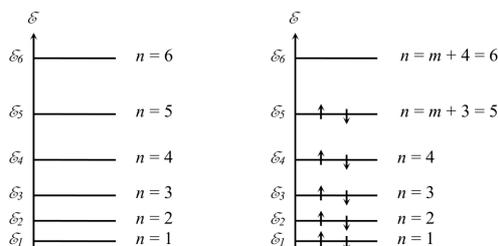


FIGURE 1 – Diagramme des niveaux d'énergie.

Le niveau d'énergie la plus basse est le niveau fondamental, d'énergie

$$\mathcal{E}_1 = \frac{h^2}{8m_e L^2}$$

correspondant à  $n = 1$ . Cette énergie est non nulle, même s'il s'agit du niveau fondamental. Cette propriété est due au confinement spatial des électrons. D'après l'inégalité de Heisenberg spatiale, on a en effet :

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

Le confinement d'un électron le long de la molécule impose une valeur maximale à  $\Delta x$  qui impose à son tour une valeur minimale non nulle à  $\Delta p$ , donc à l'énergie de l'électron, même dans l'état fondamental.

5. On compte quatre électrons  $\pi$  dans les deux doubles liaisons de la chaîne principale (en dehors du motif répété), deux électrons dans le doublet non liant de l'atome d'azote, auxquels s'ajoutent deux électrons  $\pi$  pour chaque motif répété. Avec  $m$  motifs dans la cyanine- $m$ , on obtient ainsi  $2m + 6$  électrons délocalisés dans la molécule. Le principe d'exclusion de Pauli interdit cependant d'avoir deux électrons dans la même case quantique : chaque niveau  $n$  d'énergie  $\mathcal{E}_n$  pourra donc être occupé par deux électrons possédant des spins antiparallèles (  $\uparrow$  pour l'un et  $\downarrow$  pour l'autre). Le remplissage des couches commençant par les niveaux les plus bas en énergie, on obtient le diagramme d'occupation ci-dessus (diagramme de droite, en prenant par exemple  $m = 2$ ). Les  $2m + 6$  électrons délocalisés de la molécule remplissent donc les  $m + 3$  premiers niveaux d'énergie.
6. Les  $m + 3$  premiers niveaux d'énergie sont occupés. Le premier niveau libre est le niveau  $m + 4$ , la première transition possible pour un électron est le passage du niveau  $m + 3$  au niveau  $m + 4$  en absorbant un photon d'énergie minimale :

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_{m+4} - \mathcal{E}_{m+3} = \left( (m+4)^2 - (m+3)^2 \right) \frac{h^2}{8m_e L^2} = (2m+7) \frac{h^2}{8m_e L^2}$$

Cette variation d'énergie est liée à la fréquence  $\nu$  du photon par la relation d'Einstein :

$$\Delta \mathcal{E} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

On en déduit ainsi la longueur d'onde de la lumière absorbée par la cyanine- $m$  lors de cette transition :

$$\lambda = \frac{8m_e L^2 c}{(2m + 7)h}$$

7. La longueur  $a$  le long de la molécule s'obtient par projection de la longueur des liaisons C = C et C – C :

$$a = 2 \times 144 \times \cos 60^\circ = 2 \times 144 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 249 \text{ pm}$$

Par ailleurs, le long de la molécule, on compte  $(m + 1)$  distances  $a$  et deux longueurs  $b$ , soit :

$$L = (m + 1)a + 2b$$

8. On reprend l'expression de la longueur d'onde de la lumière absorbée par la cyanine- $m$ , connaissant à présent la longueur de la molécule :

$$\lambda = \frac{8m_e c}{h} \frac{((m + 1)a + 2b)^2}{(2m + 7)}$$

On trace alors le graphe de  $\lambda$  en fonction de  $X = \frac{((m+1)a+2b)^2}{(2m+7)}$  :

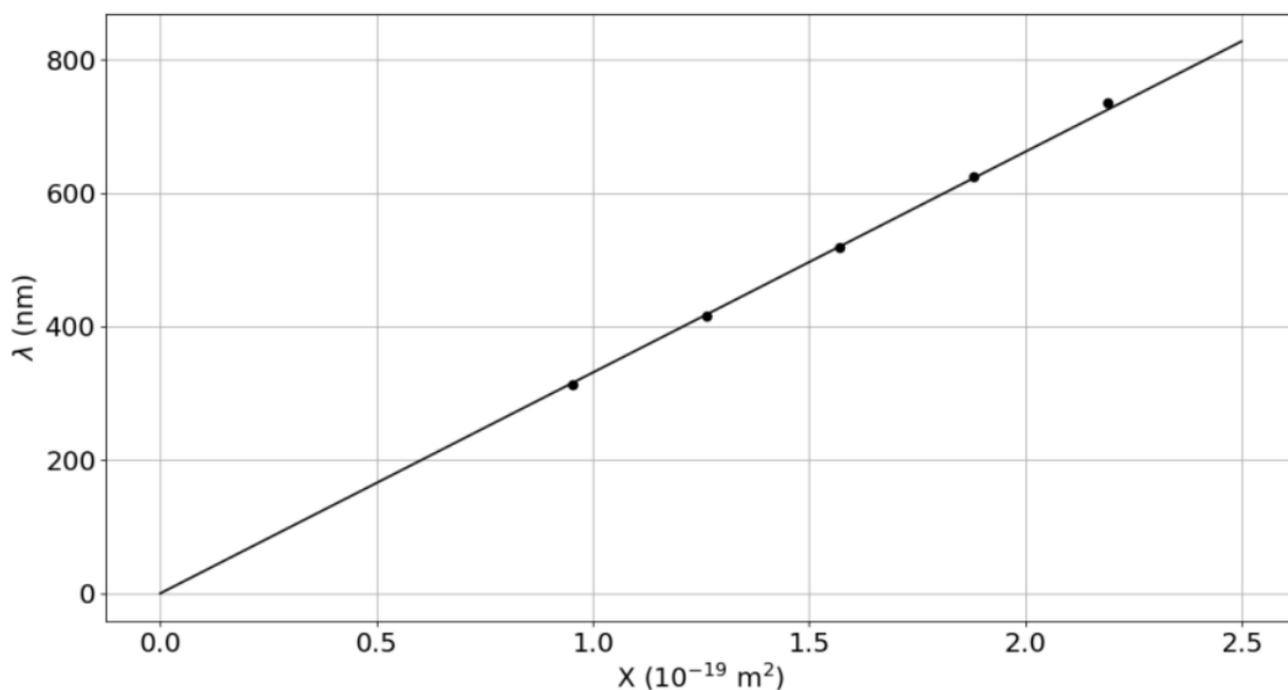


FIGURE 2 – Graphique de  $\lambda$  en fonction de  $X$ .

Les points s'alignent statistiquement sur une droite passant par l'origine, comme le prévoit le modèle. L'accord entre le modèle étudié et les points expérimentaux est excellent. La pente de la droite se calcule avec Python

*Bien sûr, ceci n'était pas demandé dans le DS*

:

```
import numpy as np

lambda_nm = np.array([313, 416, 519, 625, 735]) * 1e-9 # m
m = np.array([0, 1, 2, 3, 4])
a = 249e-12 # m
b = 144e-12 # m
X = ((m+1)*a + 2*b)**2 / (2*m + 7)
alpha = np.mean(lambda_nm / X)
u_alpha = np.std(lambda_nm / X, ddof=1)
```

On obtient pour la pente :

$$\alpha = 3.31 \times 10^{12} \text{ m}^{-1}$$

avec l'incertitude-type :

$$u(\alpha) = 2.8 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$$

On identifie son expression grâce au modèle :

$$\alpha = \frac{8m_e c}{h}$$

ce qui permet de calculer la masse d'un électron confiné dans la boîte quantique :

$$m_e = \frac{\alpha h}{8c} = 9.14 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

et l'incertitude-type associée :

$$u(m_e) = \frac{h}{8c} u(\alpha) = 7.7 \times 10^{-33} \text{ kg}$$

Pour comparer avec la valeur tabulée, on calcule l'écart normalisé sous la forme :

$$Z = \frac{m_{e,\text{exp}} - m_{e,\text{tab}}}{u(m_{e,\text{exp}})} = 0.4$$

Puisque  $|Z| < 2$ , la valeur obtenue pour la masse de l'électron est bien compatible avec la valeur tabulée, ce qui confirme encore la validité du modèle. Il est tout de même remarquable (voire surprenant) qu'un modèle aussi simple rende aussi bien compte des résultats expérimentaux, sachant qu'en réalité le puits de potentiel dans lequel sont placés les électrons varie dans l'espace au voisinage de chaque atome de la chaîne moléculaire...

9. On extrapole le modèle obtenu pour la cyanine  $m = 5$  pour prévoir la longueur d'onde absorbée par la molécule. On obtient ainsi  $\lambda = 828 \text{ nm}$ . La molécule de cyanine  $m = 5$  absorbe dans l'infrarouge : elle sera parfaitement transparente dans le visible et ne fera apparaître aucune couleur. Elle ne peut donc pas servir de colorant.