Corrigé du DS 8

Exercice 1 : banque CCINP 57

1. a) f est continue en $(0,0) \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 / \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\| < \alpha \Longrightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$.
$\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$ puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$ (espace de dimension finie) .

b) f est différentiable en $(0,0) \iff \exists L \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})/$ au voisinage de $(0,0)$, $f(x,y) = f(0,0) + L(x,y) + o(\|(x,y)\|)$.

Remarque : Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ alors $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

2. On notera $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$.
On remarque que $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| \leqslant \|(x,y)\|$ et $|y| \leqslant \|(x,y)\|$ (*).

a) $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ et $(x,y) \mapsto xy(x^2-y^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ donc, f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
Continuité en (0,0) :

On a, en utilisant (*) et l'inégalité triangulaire, $|f(x,y) - f(0,0)| = \left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant |x|.|y| \leqslant \|(x,y)\|^2$.
Donc f est continue en $(0,0)$.

b) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$ et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et elles sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

De plus, $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$. (**)
Existence des dérivées partielles en $(0,0)$:

$\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$; donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
De même, $\forall\, y \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$, donc $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$; donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Continuité des dérivées partielles en $(0,0)$:

D'après (*) et (**), $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$,

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{x^4|y| + 4x^2|y|^3 + |y|^5}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \dfrac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = 6\|(x,y)\|$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = 6\|(x,y)\|$.
Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.
Conclusion : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : CCINP 2024 maths 1

Q1. (H) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients continus et $x \mapsto x^2$ ne s'annule pas sur I, donc (H) équivalente à l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 normalisée :

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2-x^2}{x^2}y = 0.$$

Donc :

$$\boxed{S_I(H) \text{ est un espace vectoriel de dimension 2.}}$$

Q2. Soit f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Donc $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

et

$$\begin{aligned}
&x^2 f''(x) + 4xf'(x) + (2-x^2)f(x)\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}\\
&\qquad \text{(décalage dans la dernière somme, termes nuls dans les autres)}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 4na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n\\
&= 2a_0 + 6a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big((n^2+3n+2)a_n + a_{n-2}\Big)x^n
\end{aligned}$$

D'après le théorème d'unicité du développement en série entière sur un voisinage à droite de 0 :

$$\begin{aligned}
f \in S_I(E) &\Leftrightarrow \forall x \in]0\,;+\infty[, 2a_0 + 6a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big((n^2+3n+2)a_n + a_{n-2}\Big)x^n = 1\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_0 = 1\\ 6a_1 = 0\\ \forall n \geqslant 2, a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)} \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \begin{cases} \frac{1}{(n+2)!} & \text{si } n \in 2\mathbb{N}\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{(par récurrence)}
\end{aligned}$$

On considère la série entière $\sum \frac{x^{2k}}{(2k+2)!}x^{2k}$; pour tout $r \in]0\,;+\infty[$, d'après le théorème des croissances comparées

$$\frac{\frac{r^{2k+2}}{(2k+4)!}}{\frac{r^{2k}}{(2k+2)!}} = \frac{r^2}{(2k+4)(2k+3)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Donc, d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum \frac{x^{2k}}{(2k+2)!}r^{2k}$ converge ; donc le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$. Donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{l'unique solution de } (E) \text{ sur } I \text{ développable en série entière sur } \mathbb{R} \text{ est}\\ f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+2)!}.\end{array}}$$

Soit $x \in]0\,;+\infty[$

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} &= \frac{1}{x^2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - 1\right)\\
&= \frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\\
&= \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \qquad \text{(décalage d'indice)}\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\forall x \in I, f(x) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}.}$$

Q3. On sait que $f, g \in S_I(E)$, donc d'après le principe de superposition, $h_2 = f - g : x \mapsto \frac{\operatorname{ch} x}{x^2} \in S_I(H)$. Et (h, h_2) est une famille libre car ch et sh ne sont pas colinéaires. Donc $S_I(H) = \operatorname{Vect}(h, h_2)$ et

$$\boxed{S_I(E) = \left\{x \mapsto \frac{1}{x^2}(\lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x - 1);\ \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Q4. On sait que $S_I(H) = \operatorname{Vect}(h, f-g)$; de même avec

$$h_3 : \begin{array}{ccc}]-\infty\,;0[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \frac{\operatorname{sh} x}{x^2} \end{array} \quad \text{et} \quad h_4 : \begin{array}{ccc}]-\infty\,;0[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \frac{\operatorname{ch} x}{x^2} \end{array}$$

$S_{]-\infty\,;0[}(H) = \operatorname{Vect}(h_3, h_4)$.

Analyse : soit f une solution de (H) sur $\mathbb{R}$, donc f est solution de (H) sur I et sur $]-\infty\,;0[$, donc il existe $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x<0, f(x)=a\frac{\operatorname{sh} x}{x^2}+b\frac{\operatorname{ch} x}{x^2}$$
$$\forall x>0, f(x)=c\frac{\operatorname{sh} x}{x^2}+d\frac{\operatorname{ch} x}{x^2}$$

Or $\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{\sim} 1$, donc $\frac{\operatorname{ch} x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$ et $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\frac{\operatorname{sh} x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$.

Supposons par l'absurde $b \neq 0$, donc $f(x) \underset{x\to 0^-}{\sim} \frac{b}{x^2} \xrightarrow[x\to 0^-]{} \pm\infty$. Or f est continue sur $\mathbb{R}$, d'où la contradiction, donc $b=0$.

De même, si $a\neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{a}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} \pm\infty$, d'où la contradiction. Donc $a=0$. Et de même à droite en 0 on obtient $c=d=0$.

Donc, pour tout $x\neq 0, f(x)=0$ et par continuité de f sur $\mathbb{R}$, f est la fonction nulle.

Synthèse : la fonction nulle est bien solution de (H) sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $S_{\mathbb{R}}(H)=\{0\}$ et

$$\boxed{S_{\mathbb{R}}(H) \text{ est un espace vectoriel de dimension } 0.}$$

Exercice 3

Q5. C'est une démonstration de cours : chapitre 7 théorème 3.1 (refait dans le cadre $a\in\mathcal{L}(E)$ dans le chapitre 16 démonstration 2.1).

Q6. C'est une démonstration de cours : chapitre 16 théorème 2.11.

Q7. On sait que la série $\sum \frac{1}{k!}H^k$ converge absolument, donc :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\right\| &\leqslant \frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|H\|^k\\ &= \sum_{j=+\infty}^{0}(j+2)!\,\|H\|\,j+1\\ &\leqslant \|H\|\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}r^j\\ &\leqslant \|H\|\,e^r \xrightarrow[H\to 0]{} 0\end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{H\to 0}\frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k=0.}$$

Donc :

$$\frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k \underset{H\to 0}{=} o(H).$$

or :

$$\exp(0+H)=I_n+H+\frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k$$

donc :

$$\exp(0+H)\underset{H\to 0}{=} I_n+H+o(H).$$

Donc :

$$\boxed{\exp : A\mapsto e^A \text{ est différentiable en la matrice 0 et } \mathrm{d}\exp(A)=\mathrm{id} : H\mapsto H.}$$