Corrigé du DS 7

PROBLÈME 1 : 2024 MP maths 1 problème

Problème

Q1. La famille $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable d'après le théorème de Riemann. Donc par sommation par paquets (séparation des termes d'indices pairs et impairs) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

donc : $\frac{3}{4}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$, donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}.}$$

Partie I

Q2. Les fonctions sin et $t\mapsto t^{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc leur composée $f : x\mapsto(\sin x)^{n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=(n+1)\cos x(\sin x)^n.}$$

Par intégration par parties avec :

$$\begin{aligned}f(x)&=(\sin x)^{n+1}g(x)=-\cos x\\ f'(x)&=(n+1)\cos x(\sin x)^n g'(x)=\sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{n+2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{n+1}\sin x\,\mathrm{d}x\\ &=\left[-\cos x(\sin x)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+1)(\sin x)^n\cos^2(x)\,\mathrm{d}x\\ &=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n(1-(\sin x)^2)\,\mathrm{d}x\\ &=(n+1)(W_n-W_{n+2})\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, (n+2)W_{n+2}=(n+1)W_n}$$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}W_{2n+1}&=\frac{2n}{2n+1}\times W_{2n+1}\\ &=\frac{\prod_{k=1}^n(2k)}{\prod_{k=1}^n(2k+1)}\times W_1 \qquad \text{(par récurrence)}\\ &=\frac{\left(\prod_{k=1}^n(2k)\right)^2}{\prod_{j=1}^{2n+1}j}\times W_1\\ &\qquad\text{(multiplication par les termes pairs au numérateur et dénominateur)}\\ &=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

Or

$$W_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=1$$

Donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, W_{2n+1}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

le résultat étant donné dans l'énoncé, il est aussi rapide de faire la démonstration par récurrence. C'est sans doute ce qui était attendu.

Q3. Par développable en série entière usuel, pour tout $t\in\,]-1\,;1[$,

$$\begin{aligned}(1+t)^{-\frac{1}{2}}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}t^n\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!}t^n\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!\prod_{k=1}^n(2k)}t^n\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^n\end{aligned}$$

et pour tout $x\in\,]-1\,;1[, -x^2\in\,]-1\,;1[$ donc :

$$\boxed{\forall x\in\,]-1\,;1[, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}.}$$

une solution qui respecte strictement les théorèmes au programme : D'après le théorème de dérivation terme à terme, le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} t^{2n+1}$$

est égal à celui de $\sum \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n}$ c'est à dire 1. Soit g sa somme sur $]-1\,;1[$. La fonction g est donc dérivable sur $]-1\,;1[$ de dérivée $x \mapsto$ $frac1\sqrt{1-x^2}$ et $g(0) = 0$. Donc $g = \text{Arcsin}$ sur $]-1\,;1[$.

Donc :

$$\boxed{\forall x \in\,]-1\,;1[, \text{Arcsin}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} t^{2n+1}.}$$

par théorème de primitivation, pas tout à fait au programme mais presque. Attention alors à ne pas oublier le terme Arcsin 0.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, $\forall x \in\,]-1\,;1[$

$$\begin{aligned}\text{Arcsin}\, x &= \text{Arcsin}\, 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} t^{2n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} t^{2n+1}\end{aligned}$$

Q4. Soit $x \in [0\,;\frac{\pi}{2}[$, donc $t = \sin x \in [0\,;1[\, \subset\,]-1\,;1[$
donc : $\text{Arcsin}\, t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} t^{2n+1}$.
De plus $x \in\,]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$, donc $\text{Arcsin}\, t = \text{Arcsin} \sin x = x$, donc :

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\tfrac{\pi}{2}[, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}.}$$

Q5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction continue et positive sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ et la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ vers la fonction $x \mapsto x$ (qui est continue sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$).

Donc d'après le théroème d'intégration terme à terme positif (dans $[0\,;+\infty]$) :

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}\right) \mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}}$$

Q6. D'après la question 11,

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}\right) \mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\end{aligned}$$

et d'après la question 9, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \,\mathrm{d}x\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} W_{2n+1}\\ &= \frac{1}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

Donc, d'après la question 12,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Ainsi, d'après la question 8,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Partie II

Q7. Soit $x \in\,]-1\,;1[$, donc $\left|x^2\right| < 1$ et par développable en série entière usuel,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-1} &= -\frac{1}{1-x^2}\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in\,]-1\,;1[, \tfrac{1}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -x^{2n}.}$$

Et

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} -x^{2n}\ln x\right)\mathrm{d}x,$$

or pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : x\mapsto -x^{2n}\ln x$ est une fonction continue et positive sur $]0\,;1[$ et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;1[$ vers la fonction $x\mapsto \frac{\ln x}{x^2-1}$ (qui est continue sur $]0\,;1[$). Donc d'après le théorème d'intégration terme à terme positif, dans $[0\,;+\infty]$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} -x^{2n}\ln x\right)\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 -x^{2n}\ln x\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par intégration par parties avec

$$\begin{aligned} f(x) = \ln x g(x) &= \frac{-x^{2n+1}}{2n+1}\\ f'(x) = \frac{1}{x} g'(x) &= -x^{2n}\end{aligned}$$

et $x^{2n+1}\ln x \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ et par croissances comparées, $x^{2n+1}\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 -x^{2n}\ln x\,\mathrm{d}x &= 0 + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.}$$

Q8. Soit la fonction

$$g : \begin{array}{ccc}[0\,;+\infty[^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,t) & \longmapsto & \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\end{array}$$

- $\forall t\in[0\,;+\infty[, g(.,t) : x\mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$,
- $(\forall x\in[0\,;+\infty[, g(x,.) : t\mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$,)
- **domination** : $\forall x\in[0\,;+\infty[, \forall t\in[0\,;+\infty[$,

$$|g(x,t)| \leqslant \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1+t^2}$$

Or la fonction $\varphi : t\mapsto \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$; donc $\varphi\in L^1([0\,;+\infty[)$.

Donc, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie et continue sur l'intervalle } [0\,;+\infty[.}$$

Q9. Avec les notations de la question précédente,

- $\forall x\in[0\,;+\infty[, g(x,.) : t\mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ d'après la question 15,
- $\forall t\in[0\,;+\infty[, g(.,t) : x\mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;1]$, et pour tout $x\in]0\,;1]$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1+t^2}\times\frac{t}{1+(xt)^2}$
- $(\forall x\in[0\,;+\infty[, \frac{\partial g}{\partial x}(x,.) : t\mapsto \frac{1}{1+t^2}\times\frac{t}{1+(xt)^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$,)
- **domination** : $\forall a\in]0\,;1], \forall x\in[0\,;a], \forall t\in[0\,;+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{t}{1+t^2}\times\frac{1}{1+a^2t^2}$$

Or la fonction $\psi : t\mapsto \frac{t}{1+t^2}\times\frac{1}{1+a^2t^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et $\psi(t) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2t^3} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ et $t\mapsto\frac{1}{t^3}$ est une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$; donc $\varphi\in L^1([0\,;+\infty[)$.

Donc, d'après le théorème de Leibniz,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0\,;1] \text{ et}\\ \forall x\in]0\,;1], f'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,\mathrm{d}t.\end{array}}$$

Q10. Pour tout $x\in]0\,;1[$ et tout $t\in[0\,;+\infty[$,

$$\boxed{\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} = \frac{(1-x^2)t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}}$$

Donc, pour tout $x\in]0\,;1[$,

$$\begin{aligned}(1-x^2)f'(x) &= \int_0^{+\infty}\frac{(1-x^2)t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2) - \ln(1+t^2x^2)\right]_0^{+\infty}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\ln(\frac{1+t^2}{1+t^2x^2}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) - \ln 1\right) \\
&= \ln x
\end{aligned}
$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in]0\,;1[, f'(x) = \tfrac{\ln x}{x^2-1}.}$$

Q11.

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan} t \times \operatorname{Arctan}' t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[(\operatorname{Arctan} t)^2\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}
$$

Donc :

$$\boxed{f(1) = \tfrac{\pi^2}{8}.}$$

De plus, $f \in \mathcal{C}^1(]0\,;1])$, donc $\forall x \in]0\,;1[$

$$\int_x^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = f(1) - f(x)$$

et f est continue en 0, donc

$$\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = f(1) - f(0) = \frac{\pi^2}{8} - \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.$$

De plus, d'après la question 14,

$$\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Donc : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et d'après la question 8,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{n^2} = \tfrac{\pi^2}{6}.}$$

PROBLÈME 2 - Intégrales de Fresnel : 2022 MP maths 1 problème parties I et II

dans fichier à part