EXERCICE

Q1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors pour tout entier k non nul, $\mathbb{P}(X=k)=(1-p)^{k-1}p$.
La fonction génératrice s'écrit :

$$G_X(t)=E[t^X]=\sum_{k=1}^{+\infty}t^k\mathbb{P}(X=k)=tp\sum_{k=0}^{+\infty}((1-p)t)^k=tp\,\frac{1}{1-(1-p)t}$$

La fonction est définie d'après le cours sur les séries géométriques pour $t\in\left]\dfrac{-1}{1-p},\dfrac{1}{1-p}\right[$
Le rayon de convergence étant supérieur strictement à 1, on peut utiliser la formule $E[X]=G'_X(1)$
On trouve $G'(X)=\dfrac{p(1-(1-p)t)+(1-p)pt}{(1-(1-p)t)^2}$, et de là $E[X]=G'_X(1)=\dfrac{1}{p}$

Q2. Le nombre de code possibles est égal à 10^4, tous les codes étant équiprobables, la probabilité de trouver le bon code est de $1/10000$.

Q3. Au pire des cas il doit tester 10000 codes donc $X(\Omega)=[\![1,10000]\!]$.
Pour tout $i\in[\![1,10000]\!]$ on note A_k l'évènement «le k-ième code essayé est le bon». Pour tout $k\in[\![1,10000]\!]$ on a $(X=k)=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{k-1}\cap\overline{A_k}$, donc d'après la formule des probabilités composées on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k)&=\mathbb{P}(A_1)\times\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\times\cdots\times\mathbb{P}_{A_1\cap\ldots A_{k-2}}(A_{k-1})\times\mathbb{P}_{A_1\cap\ldots A_{k-1}}\left(\overline{A_k}\right)\\&=\frac{9999}{10000}\times\frac{9998}{9999}\times\cdots\times\frac{10000-k+1}{10000-k+2}\times\frac{1}{10000-k+1}\\&=\frac{1}{10000}\end{aligned}$$

Donc X suit une loi uniforme sur l'ensemble $[\![1,10000]\!]$. On sait donc que X a une espérance et que $E(X)=\frac{10001}{2}=5000,5$.

Q4. On est cette fois dans le cadre d'une suite de schémas de Bernoulli mutuellement indépendants (X_i) dont la probabilité de succès est $\frac{1}{10^4}$,
On a $(X=k)=(X_1=0)\cap(X_2=0)\cap(X_{k-1}=0)\cap(X_k=1))$
De là $\mathbb{P}(X=k)=\frac{(10^4-1)^{k-1}}{10^{4k}}$, on retrouve le cas de **Q1** où X suit une loi géométrique de paramètre $p=10^{-4}$
Son espérance est donc $\dfrac{1}{p}=10^4$

Q5.
```
code=4714
n=int(input ('Taper un code à 4 chiffres :')
k=1
while k != code
       k = k+1
       n=int(input ('Taper un nouveau code à 4 chiffres :')
print('Vous avez trouvé le code en '+str(k)+' essais.')
```

Q6. Par exemple :

```
def crypte(m) :
    l=[]
    for e in m :
        l.append((e+5)%10)
    return l
```

Ou aussi

```
def crypte(m) :
    for i in range(4) :
        m[i]=((m[i]+5)%10)
    return m
```

PROBLÈME - Intégrales de Fresnel

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Q7. La fonction $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{it^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout x réel, H est la primitive de f nulle en 0, H est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$ si $x \geq 0$ et sur $[x,0]$ sinon. On en déduit que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $H'(x) = \mathrm{e}^{ix^2}$.

f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que H' et donc H sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q8. Comme f est paire sur $\mathbb{R}$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_{-x}^{0} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ donc $-H(-x) = H(x)$.

Donc H est impaire sur $\mathbb{R}$.

Q9. On sait que pour tout $z \in \mathbb{C}, \mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{it^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{t^{2n}}{n!}$. Donc la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{it^2}$ est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence infini.

Par convergence uniforme de la série sur tout segment $[0,x]$ si $x \geq 0$, $[x,0]$ sinon, on peut intégrer terme à terme,

pour tout $x \in \mathbb{R}$: $H(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{n!}$.

La fonction H est donc elle aussi développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence infini.

Q10. Soit $x > 0$. On utilise le changement de variable $t = \sqrt{u}$ qui est $\mathcal{C}^1$ strictement croissant et bijectif de $]0,x]$ vers $]0,x^2]$ et on obtient : $H(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$

Q11. Soit $x > 4\pi^2$.(sans doute une coquille ici, c'est plutôt $x > \sqrt{2\pi}$).

On effectue une intégration par parties :les fonctions $u \longmapsto \mathrm{e}^{iu}$ et $t \longmapsto \frac{1}{u^{3/2}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2\pi, x^2]$.

$$H(x)-H(\sqrt{2\pi}) = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{iu}}{i\sqrt{u}}\right]_{2\pi}^{x^2} - \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{-\mathrm{e}^{iu}}{2iu^{3/2}}\,\mathrm{d}u = -\frac{i}{2x}\mathrm{e}^{ix^2} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{iu}}{u^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$

Q12. Comme la fonction $t \longmapsto e^{it^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

On a $\left|\frac{e^{iu}}{u^{3/2}}\right| = \frac{1}{u^{3/2}}$ donc, par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente sur $[2\pi; +\infty[$, la fonction $u \longmapsto \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

De plus $\left|-\frac{i}{2x}e^{ix^2}\right| = \frac{1}{2x}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

On a donc :

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = \int_{2\pi}^{x} e^{it^2}\ dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}\ du$$

On a montré la convergence de l'intégrale sur $[2\pi, +\infty[$, par continuité de la fonction sur le segment $[0, 2\pi]$, on en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt$ converge.

Q13. Par exemple :

```
def integrale (f, a, b, n):
    S=0
    for k in range (n):
        S=S+f(a+k*(b-a)/n)
return S*(b-a)/n
```

Q14. Par exemple :

On commence par définir `f` avant de l'utiliser dans `H`

```
def f(t):
    return exp(1j*t**2)

def H(x,n):
    return integrale(f,0,x,n)
```

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Q15. On a : $\left|e^{-x^2\left(t^2-i\right)}\right| = \left|e^{-x^2t^2}\right| \times \left|e^{ix^2}\right| = e^{-x^2t^2}$ et $|t^2 - i| = \sqrt{(t^2)^2 + 1^2} = \sqrt{t^4+1}$.

Q16. <u>On montre tout d'abord que l'intégrale est définie</u> sur $\mathbb{R}$:

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé la fonction $t \longmapsto f(x,t) = \frac{e^{-x^2\left(t^2-i\right)}}{t^2-i}$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire,

De plus, pour $t > 1$: $|f(x,t)| = \frac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, on peut donc dire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x,t)\,dt$ converge.

$t \mapsto f(x,t)$ étant paire, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(x,t)\,dt$ converge.

La fonction intégrée étant continue sur l'intervalle $[-1; 1]$, on peut donc conclure que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

<u>Montrons maintenant la continuité de g</u>

Soit $x \in \mathbb{R}_+$

— pour t fixé réel, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

— pour x fixé dans $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

— $\forall (x,t) \in R_+ \times \mathbb{R}, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$ où $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ car φ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\varphi \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, de même $\varphi(t) \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

On peut donc appliquer le théorème de continuité des intégrale à paramètre et déduire que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction g étant paire, on en conclut qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

NB : on pouvait appliquer directement ce dernier théorème qui montrait la continuité et donc la définition de l'intégrale sur $\mathbb{R}$.

Q17. Soit $(x_n)_n$ une suite divergente vers $+\infty$.

Alors pour tout t fixé dans $\mathbb{R}$: $\underset{n\to+\infty}{lim} f(x_n,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \text{pas de limite} & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

On va donc travailler avec $h = |f|$

Alors pour tout t fixé dans $\mathbb{R}$: $\underset{n\to+\infty}{lim} h(x_n,t) = \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

Cette fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$: $|h(x_n,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$, et $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ par comparaison.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient que

$|g(x_n)| \leq \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_n,t)| \,\mathrm{d}t$ et avec le théorème de convergence dominée

$\underset{n\to+\infty}{lim} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_n,t| \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathrm{d}t = 0$

D'où $\underset{n\to+\infty}{lim} |g(x_n)| = 0$, donc $\underset{n\to+\infty}{lim} g(x_n) = 0$

Par caractérisation séquentielle de la limite, on a $\underset{x\to+\infty}{lim} g(x) = 0$ et par parité on a la même limite en $-\infty$.

N.B. : il n'était pas nécessaire de passer par la suite, le programme de maths permet avec la convergence dominée "généralisée" de répondre à la question.

Q18. Soit $b \geq a > 0$ et $x \in [a,b]$.

— Pour t fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$

— Pour x fixé dans $[a,b]$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

— Pour x fixé dans $[a,b]$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2x\mathrm{e}^{-x^2\left(t^2-i\right)}$ est continue sur $\mathbb{R}$

— $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2b\mathrm{e}^{-a^2t^2}$. Et $2b\mathrm{e}^{-a^2t^2} \underset{t\to\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \longmapsto 2be^{-a^2t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On peut donc appliquer le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale et on obtient que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Ceci étant réalisé pour tous réels a,b, on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis par parité qu'elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Q19. On a de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -2x \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2\left(t^2-i\right)}\mathrm{d}t$$

Donc pour $x > 0$ grâce au changement de variable $u = xt$:

$$g'(x) = -2\mathrm{e}^{ix^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = -2\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{ix^2}$$

Q20. On trouve $\frac{1}{X^2-i} = \frac{e^{-i\pi/4}}{2}\left(\frac{1}{X-e^{i\pi/4}} - \frac{1}{X+e^{i\pi/4}}\right)$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}u \quad \text{(en posant } u = t-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t) \\
&= \left[\sqrt{2}Arctan(\sqrt{2}u)\right]_{u\to-\infty}^{u\to+\infty} \\
&= \pi\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Par le changement de variable $u=-t$, on prouve que
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2-\sqrt{2}u+1}\,\mathrm{d}u = \pi\sqrt{2}.$

Avant de faire le calcul de l'intégrale, on observe les quotients $\dfrac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}$ et $\dfrac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}$ qui si on intègre brutalement génèrent des intégrales généralisées à priori divergentes.

$$\begin{aligned}
J &= \int_A^B \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\ \mathrm{d}t \\
&= \left[ln(t^2-\sqrt{2}t+1) - ln(t^2+\sqrt{2}t+1)\right]_A^B \\
&= \left[ln\left(\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)\right]_A^B
\end{aligned}$$

On trouve alors quand $A\to-\infty$ et $B\to+\infty$ que $J=0$

On a alors :

$$\begin{aligned}
g(0) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-i} \\
&= \frac{1-i}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t + i\pi\sqrt{2}+i\pi\sqrt{2}\right) \\
&= \frac{1-i}{4}\times\left(0+2i\pi\sqrt{2}\right) \\
&= (1+i)\frac{\pi\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Q21. Pour $x>0$:

$$g(x)-g(0) = \int_0^x g'(t)\mathrm{d}t = -2\sqrt{\pi}\int_0^x e^{it^2}\mathrm{d}t = -2\sqrt{\pi}H(x)$$

On fait tendre $x\to+\infty$:

$$0 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\pi = -2\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} e^{it^2}\ \mathrm{d}t$$

On a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{it^2}\mathrm{d}t = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$.

En identifiant les parties réelles et imaginaires qui nécessairement sont des intégrale convergentes, on trouve

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Partie III - Etude d'une série de fonctions

Q22. La suite (b_n) est bornée, soit $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq M$.

On a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq |a_{N+1}b_N| \leq Ma_{N+1}$. Donc $a_{N+1}b_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq |(a_n - a_{n+1})\, b_n| \leq M\,(a_n - a_{n+1})$. (la suite a étant décroissante, $a_n - a_{n+1} \geq 0$

On en déduit que $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n+1})b_n\right| \leq M\sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n+1})$

Par ailleurs $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{N+1}$ (somme télescopique), comme la suite (a_n) converge on sait que la série $\sum(a_n - a_{n+1}))$ converge.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\,(a_n - a_{n+1})\, b_n$ converge absolument.

On a donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n\,(b_n - b_{n-1}) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1})\, b_n$.

Ainsi la série $\sum a_n\,(b_n - b_{n-1})$ converge.

Q23. Soient $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathrm{e}^{ix} \neq 1$ et on a en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^k = \mathrm{e}^{ix}\frac{\mathrm{e}^{inx}-1}{\mathrm{e}^{ix}-1} = \mathrm{e}^{ix}\frac{\mathrm{e}^{inx/2}}{\mathrm{e}^{ix/2}}\frac{\mathrm{e}^{inx/2}-\mathrm{e}^{-inx/2}}{\mathrm{e}^{ix/2}-\mathrm{e}^{-ix/2}} = \mathrm{e}^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Q24. On fixe $x \in]0, 2\pi[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ikx}$. On pose aussi $b_0 = 0$.

Alors (a_n) est décroissante positive de limite nulle et (b_n) est bornée puisque :

$$\forall n \geq 1, \quad |b_n| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

Donc la série $\displaystyle\sum a_n\,(b_n - b_{n-1}) = \sum\frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{n}}$ converge. Ainsi S est définie sur $]0, 2\pi[$.

Q25. L'énoncé semble admettre la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

Celle-ci n'est pas immédiate car la convergence n'est pas absolue.

On démontre la convergence par une intégration par partie sur $[1, X]$ en posant $u(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $v'(t) = e^{it}$, (u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, X]$

On obtient la convergence car la nouvelle intégrale obtenue converge absolument par comparaison avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{ix}-1}{ix}S(x)-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{e}^{ix}-1}{ix}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{e}^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{i(k+1)x}-\mathrm{e}^{ikx}}{ix\sqrt{k}}-\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{e}^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{ix}-1}{ix}S(x)-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right|\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{\mathrm{e}^{i(k+1)x}-\mathrm{e}^{ikx}}{ix\sqrt{k}}-\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{e}^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right|\leq\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$$

Le dernier membre de l'égalité est la somme d'une série de Riemann convergente, on note C sa somme et on obtient le résultat attendu.

Q26. Si $x>0$ le changement de variable $u=xt$ donne : $I(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$

On a démontré à **Q12.** que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ convergeait.

Donc $I(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t=(1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Q27. En reconnaissant un taux d'accroissement $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{ix}-1}{ix}\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}1$.

(on peut aussi écrire $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{ix}-1}{ix}=\frac{1}{i}\frac{cos(x)-1}{x}+i\frac{sin(x)}{x}$ et reconnaître les taux d'accroissements des fonctions cos et sin)

Avec la question **Q 25.**, on a

$$\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x)-\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}dt\right|\leq C$$

On en déduit

$$\left|\sqrt{x}\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x)-I(x)\right|\leq C\sqrt{x}$$

En faisant tendre x vers 0, on en déduit que $\sqrt{x}S(x)\underset{0^+}{\sim}I(x)$

Et avec la réponse de la question **Q 26.**, on en déduit que $S(x)\underset{0^+}{\sim}(1+i)\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$

FIN