

Questionnaire d'Algèbre

I) Révisions de PCST et compléments d'algèbre linéaire

1) Sur les matrices

q1) $\rightarrow \ln(A^T B) = \sum_{i=1}^m [A^T B]_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m [A^T]_{ik} [B]_{ki}$

dnc $\ln(A^T B) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ki} b_{ki}$

$\rightarrow \langle AX, Y \rangle = (AX)^T Y = (X^T A^T) Y = \sum_{i=1}^m [X^T A^T]_{1,i} [Y]_{i,1} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m x_k a_{ik} y_i$

ou en calculant le produit scalaire (dans la base canonique de $M_m(\mathbb{R})$ qui est orthonormée), on a directement c'est directement la définition du produit scalaire canonique.

$\langle AX, Y \rangle = \sum_{i=1}^m y_i [AX]_{i,1} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m y_i a_{ik} x_k$

dnc $\langle AX, Y \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m y_i a_{ik} x_k$

$\rightarrow AB = BA \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [1,m]^2, [AB]_{ij} = [BA]_{ij}$

dnc $AB = BA \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [1,m]^2, \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj}$

$\rightarrow AX = \lambda X \Leftrightarrow \forall i \in [1,m], [AX]_{i,1} = [\lambda X]_{i,1}$

dnc $AX = \lambda X \Leftrightarrow \forall i \in [1,m], \sum_{k=1}^m a_{ik} x_k = \lambda x_i$

NB: si $X \neq 0_{m,1}$, X est un vecteur propre de A associé à λ .

q2) JP faut montrer que B est inversible,
suffit de

car on peut alors multiplier à droite par B^{-1} :

$\underbrace{AB}_{=I_m} B^{-1} = 0_m \times B^{-1} = 0_m$ d'où $A = 0_m$.

q3)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

on a $2C_2 \stackrel{(*)}{=} C_1 + C_3$

de plus, C_1 et C_3 ne sont pas colinéaires^(*)

$\Rightarrow \text{rg}(A) = 2$

$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) \stackrel{(*)}{=} \text{Vect}(C_1, C_3)$

dnc par $(**)$, (C_1, C_3) est une base de $\text{Im}(A)$

c'est famille génératrice de $\text{Im}(A)$ et libre

de plus, (A est symétrique et) $2C_2 = C_1 + C_3$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A)$

Comme $\text{rg}(A)=2$, par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A))=1$

Ainsi, comme $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$ $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\text{Ker}(A)$. cette famille libre de $\text{Ker}(A)$ de cardinal égal à la dimension

q5) A est inversible $\Leftrightarrow \forall B \in M_{n,n}(K)$, $AX=B$ a une unique solution

$$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$$

$$\Leftrightarrow (C_1, \dots, C_n) \text{ est libre (ou génératrice de } M_{n,n}(K))$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$$

IMPORTANT

$$\Leftrightarrow 0 \notin \text{Sp}(A)$$

$$\Leftrightarrow \varphi_A: X \mapsto AX \text{ est bijectif}$$

$$\Leftrightarrow \varphi_A \text{ est surjectif (ou injectif)}$$

$$\Leftrightarrow A^T \text{ est inversible}$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in M_n(K) \text{ tq } AB = I_n$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in M_n(K) \text{ tq } BA = I_n$$

→ Dans ce cas, on a alors $B = A^{-1}$.

q5)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11}a_{21} - a_{22}a_{11} & a_{11}a_{22} - a_{22}a_{12} & \dots & a_{11}a_{2n} - a_{22}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}a_{m1} - a_{mm}a_{11} & a_{11}a_{m2} - a_{mm}a_{12} & \dots & a_{11}a_{mn} - a_{mm}a_{1n} \end{pmatrix}$$

(Bonne idée: je vais écrire

$$\forall i \in \{2, \dots, m\}, L_i \leftarrow a_{11}L_i - a_{i1}L_1$$

puisque la 1^{ère} colonne est $\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.)

A' est obtenue en faisant des opérations élémentaires sur les lignes de A ($a_{11} \neq 0$)

$$\text{donc } \underline{\text{rg}(A') = \text{rg}(A)}$$

Les transpositions ne changent pas le déterminant, donc $\det(A) = \det(A')$

⚠ Ce ne sont pas des transpositions ici!

q6) Pour αA : - $\ln(\alpha A) = \alpha \ln(A)$

$$- \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

$$- \text{rg}(\alpha A) = \begin{cases} \text{rg}(A) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\text{si } \alpha \neq 0.$$

Les lignes 2 à n ont été multipliées par a_{11} , ce qui multiplie le déterminant par $(a_{11})^{n-1}$

De plus, l'ajout d'une combinaison linéaire de autres lignes ne modifie pas le déterminant.

$$\det(A') = (a_{11})^{n-1} \det(A).$$

► Pour A^T : - $\ln(A^T) = \ln(A)$

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$

► Pour AB : - $\ln(AB) = \ln(BA)$

- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$

si A est inversible alors $\text{rg}(AB) = \text{rg}(B)$.

si B est inversible alors $\text{rg}(AB) = \text{rg}(A)$.

► Pour A^{-1} : - pas de relation immédiate

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \neq 0$
- $\text{rg}(A^{-1}) = n$ (car A^{-1} est inversible)

► Pour $B = (\alpha C_1 + \beta C_2 | C_2 | \dots | C_n)$: - $\ln(B) = \ln(A) + \beta [C_2]_{1,1} + (\alpha - 1) [C_1]_{1,1}$

multilinéarité du déterminant $\rightarrow \det(B) = \det(A)$ si $\alpha \neq 0$ $\alpha \det(C_1 | C_2 | \dots | C_n) + \beta \det(C_2 | C_2 | \dots | C_n)$
 $= \det(A)$ $\underbrace{\det(C_2 | C_2 | \dots | C_n)}_{=0}$
 - $\text{rg}(B) = \text{rg}(A)$ si $\alpha \neq 0$
 donc $\det(B) \propto \det(A)$.

► Pour $B = (C_n | \dots | C_1)$: - pas de relation immédiate

- $\det(B) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \det(A) & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \det(A) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ par échanges $C_1 \leftrightarrow C_n$
 $C_2 \leftrightarrow C_{n-1}$
 $\vdots$
- $\text{rg}(B) = \text{rg}(A)$ $= (-1)^{\binom{n}{2}} \det(A)$

► Pour T^p : - $\ln(T^p) = \sum_{i=1}^n \epsilon_{i,i}^p$ (car triangulaire)

- $\det(T^p) = (\det(T))^p$
- $\text{rg}(T^p) \leq \text{rg}(T)$

q7) A est de rang 1 si et seulement si : $\exists i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket / C_{i_0} \neq 0_{n,1}$ et $\forall h \in \llbracket 1; n \rrbracket, \exists \alpha_h \in \mathbb{K} / C_h = \alpha_h C_{i_0}$

2) Sur les espaces vectoriels

Soit $C = C_{i_0}$ et $L = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, on a alors $A = CL$.

1) $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - f(x) - 2f(x) = 0\}$ est l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle d'ordre 2 $y' - y - 2y = 0$, donc c'est un sev.

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0 \text{ et } 2y + z = 0\} = \underbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}}_A \cap \underbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2y + z = 0\}}_B$$

A et B sont des hyperplans de $\mathbb{R}^3$ (car représentés par des équations linéaires non nulles).

En tant qu'intersection de sev, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0 \text{ et } 2y+z=0\}$ est un sev.

② ensemble solution d'un système linéaire homogène.

► $\{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid \ln(M)=0\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $\ln = 0$

• donc c'est un sev (c'est son noyau)

soit on n'est pas sûr pour toutes les équations linéaires.

► On note $\varphi: P \mapsto P(X+1) - P(X)$ linéaire

OK ici car c'est un membre nul. C'est le noyau d'une application linéaire.

$$\{P(X+1) - P(X), P \in \mathbb{R}_3[X]\} = \text{Im}(\varphi) \text{ donc c'est un sev.}$$

q2)a: $F+G = \{f+g, f \in F, g \in G\}$ (c'est un sev de E)

On le note $F \oplus G$ lorsque F et G sont en somme directe

b: F et G sont en somme directe lorsque tout vecteur $v \in F+G$ admet une unique décomposition

$$v = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{g}_{\in G}$$

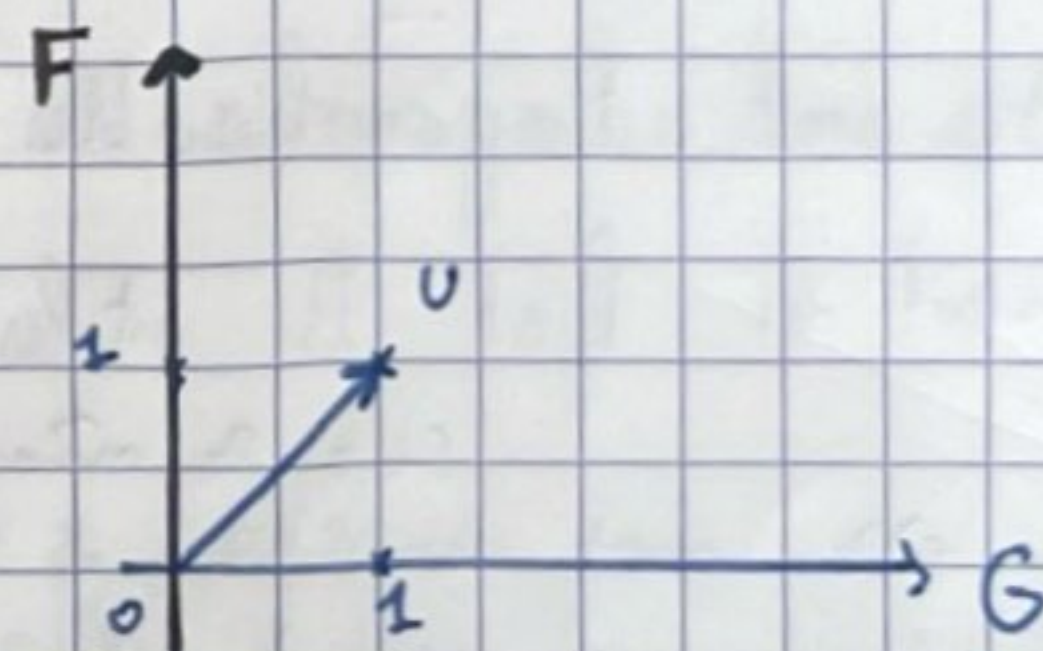
c: F et G sont supplémentaires de E lorsque tout vecteur $v \in E$ admet une unique décomposition

$$v = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{g}_{\in G}$$

q3)a: Non, avec $E = \mathbb{R}^2$, $F = \text{Vect}((1,0))$ et $G = \text{Vect}((0,1))$ on a $E = F \oplus G$

En prenant $v = (1,1)$, $v \notin F$ et $v \notin G$.

→ on ne peut pas confondre "supplémentaire" et "complémentaire".



b: $E = F \oplus G$, donc $\exists (v_1, v_2) \in F \times G \mid v = v_1 + v_2$

Comme F et G sont en somme directe, $\forall x \in F+G$, $\exists! (x_1, x_2) \in F \times G \mid x = x_1 + x_2$

d'où l'unicité du couple (v_1, v_2)

$$v \notin F \Leftrightarrow v_1 + v_2 \notin F$$

$$\Leftrightarrow v_2 \notin F$$

car $v_1 \in F$ et F est un sev.

$$\Leftrightarrow v_2 \neq 0_E$$

car $v_2 \in G$ et $F \cap G = \{0_E\}$

C'est équivalent de prouver:

$$u_1 + u_2 \in F \Leftrightarrow u_2 \in F.$$

$$\Rightarrow \text{Si } u_1 + u_2 \in F \text{ alors } u_2 = \underbrace{u_1 + u_2}_{\in F} - \underbrace{u_1}_{\in F} \in F.$$

$$\Leftarrow \text{Si } u_2 \in F \text{ alors } \underbrace{u_1}_{\in F} + \underbrace{u_2}_{\in F} \in F.$$

C'est équivalent de prouver:

$$u_2 \in F \Leftrightarrow u_2 = 0_E.$$

$$\Rightarrow \text{Si } u_2 \in F \text{ alors } u_2 \in F \cap G \text{ et } F \cap G = \{0_E\} \text{ donc } u_2 = 0_E.$$

$$\Leftarrow \text{Si } u_2 = 0_E \text{ alors } u_2 \in F.$$

q4) Les assertions sont toutes équivalentes:

$$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$$

① Soit on prouve que la somme est directe!

$$\left[\forall (v_1, \dots, v_p) \in \prod_{i=1}^p F_i, \left[\sum_{i=1}^p v_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket v_i = 0_E \right] \right] \text{ (unicité de l'écriture du vecteur nul)}$$

• La concaténation des bases des F_i donne une base de E (en dimension finie)

- 2 des assertions suivantes sont vraies (en dimension finie)

$$(i) E = \sum_{i=1}^p F_i, \quad (ii) \sum_{i=1}^p F_i \text{ est directe } (*), \quad (iii) \dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

3) Les applications linéaires et les représentations matricielles

q1) Soit φ un endomorphisme injectif de E .

$$\varphi: E \rightarrow E$$

$\dim(E) = \dim(E)$ finie

donc φ est injectif $\Rightarrow \varphi$ est surjectif $\Rightarrow \varphi$ est bijectif (conséquence du théorème du rang)

donc φ est un automorphisme de E .

q2) Soit $(A, B) \in (M_n(K))^2$

A et B sont semblables lorsqu'il existe $P \in GL_n(K) / A = PBP^{-1}$.

• Si A est diagonalisable (resp. triangulable) et B ne l'est pas alors A et B ne sont pas semblables (car si B semblable à A et A semblable à D alors B semblable à D).

• Si A et B représentent un même endomorphisme dans 2 bases différentes, alors elles sont semblables (c'est même une équivalence)

• Si A et B sont diagonalisables (resp. ~~triangulables~~ ^{non} triangulables), A et B sont semblables si et seulement si A et B ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

(i.e. la même polynôme caractéristique)

($\Leftarrow$ car elles sont semblables à la même matrice diagonale D)

q3) $F \subseteq E$ est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ lorsque $u(F) \subseteq F$ (i.e. $\forall x \in F, u(x) \in F$)

Si $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$- u(E) \subseteq E$$

$$- u(\{0_E\}) = \{0_E\} \subseteq \{0_E\}$$

donc $\{0_E\}$ et E sont stables par u .

q4) $\Rightarrow g$ commute avec g donc g commute avec tout polynôme en g

donc particulièrement, g commute avec $g - \text{Id}_E$

donc $\text{Ker}(g - \text{Id}_E)$ est stable par g .

• De même, f^3 commute avec g , donc $\text{Ker}(f^3)$ est stable par g .

• Soit $y \in \text{Im}(g)$

$$\exists x \in E / g(x) = y$$

$$\text{dnc. } g(y) = g^2(x) = g(\tilde{x})$$

$$\text{dnc. } \exists \tilde{x} \in E / g(y) = g(\tilde{x})$$

$$\text{dnc. } g(y) \in \text{Im}(g) \quad \leftarrow \text{Immédiate!}$$

$$\text{dnc. } \text{Im}(g) \text{ est stable par } g.$$

$$\rightarrow \text{Soit } y \in \text{Im}(p^2 - p + 2\text{Id}_E)$$

$$\exists x \in E / p^2(x) - p(x) + 2x = y \quad y \in \mathcal{Y}(E)$$

$$\text{dnc. } g(y) = g(p^2(x) - p(x) + 2x) = g(p^2(x)) - g(p(x)) + 2g(x) = p^2(g(x)) - p(g(x)) + 2g(x)$$

$$g(x) = \tilde{x} \quad \rightarrow \quad p^2(\tilde{x}) - p(\tilde{x}) + 2\tilde{x}$$

$$\text{dnc. } (\exists \tilde{x} \in E) g(y) = p^2(\tilde{x}) - p(\tilde{x}) + 2\tilde{x}$$

$$\text{dnc. } g(y) \in \text{Im}(p^2 - p + 2\text{Id}_E)$$

$$\text{dnc. } \text{Im}(p^2 - p + 2\text{Id}_E) \text{ est stable par } g.$$

$$\text{d) a: Soit } B_F = (f_1, \dots, f_p) \text{ et } B_G = (g_{p+1}, \dots, g_m) \text{ des bases respectives de } F \text{ et } G.$$

$$\text{On note } B = (f_1, \dots, f_p, g_{p+1}, \dots, g_m) \text{ une base de } E \text{ associée à la décomposition } E = F \oplus G.$$

$$\text{• } \mathcal{G}: F \text{ est stable par } \varphi.$$

$$\text{Mat}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p, m-p} & C \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p, m-p}(\mathbb{K}) \text{ et } C \in \mathcal{M}_{m-p}(\mathbb{K})$$

$$\text{et } A = \text{Mat}_{B_F}(\varphi|_F)$$

$$(\text{triangulaire par blocs})$$

$$\text{• } \mathcal{G}: F \text{ et } G \text{ sont stables par } \varphi.$$

$$\text{Mat}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} A & 0_{p, m-p} \\ 0_{m-p, p} & B \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_{m-p}(\mathbb{K})$$

$$\text{et } A = \text{Mat}_{B_F}(\varphi|_F) \text{ et } B = \text{Mat}_{B_G}(\varphi|_G)$$

$$(\text{diagonale par blocs})$$

$$\text{b: Sans réserve d'existence, il faut trouver } p \text{ sous } F_1, \dots, F_p \text{ tous stables par } \varphi.$$

$$\text{• En notant } B \text{ la concaténation des bases des } F_i, \text{ on a:}$$

$$\text{tel que } E = \bigoplus_{i=1}^p F_i.$$

$$\text{Mat}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} A_1 & (0) \\ & \ddots \\ (0) & A_p \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall i \in [1, p], A_i = \text{Mat}_{B_i}(\varphi|_{F_i})$$

4) Sur les polynômes interpolateurs de Lagrange

q1) $\forall i \in [1, m]$, on a
$$L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

on a $\deg(L_i) = m-1$ et $\deg(L_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{x_i - x_k}$

q2) On a $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, -1)$ pour images respectives $(y_1, y_2, y_3) = (-1, 1, 2)$

l'unique polynôme de degrés au plus 2 vérifiant $P(0) = -1$, $P(2) = 1$ et $P(-1) = 2$

est :

$$P = \sum_{k=1}^3 y_k L_k$$

donc $P = -L_1 + L_2 + 2L_3$

$$= -\left(\frac{x-2}{-2} \times \frac{x+1}{1}\right) + \left(\frac{x}{2} \times \frac{x+1}{2+1}\right) + 2\left(\frac{x}{-1} \times \frac{x-2}{-1-2}\right)$$

donc $P = \frac{1}{2}(x-2)(x+1) + \frac{1}{6}(x(x+1)) + \frac{2}{3}(x(x-2))$

II) Réduction

q1) a: λ est valeur propre de $f \iff \exists x \in E \setminus \{0_E\} / f(x) = \lambda x$

b: x est un vecteur propre de $f \iff x \neq 0_E$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K} / f(x) = \lambda x$

c: $v \in E_\lambda \iff v \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \iff f(v) = \lambda v$

q2) a: Faux, il faut $X \neq 0_{m,n}$

b: Faux, seulement vrai pour les éléments de $E_\lambda(A)$.

c: Faux, "scindé" $\Rightarrow$ "triagonalisable", il faut en plus que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $m_\lambda = \dim(E_\lambda)$

(ici χ_A est scindé à racines simples, (comme χ_A est annulateur de A) A est

diagonalisable) $\hookrightarrow$ 3 conditions d'avoir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tous distincts.

q3) Les assertions sont équivalentes:

$\bullet \lambda \in \text{Sp}(A)$

► $\exists X \in \mathcal{M}_m(K) \setminus \{0_m\} / AX = \lambda X$

► $\text{Ker}(A - \lambda I_m) \neq \{0_m\}$

► $\text{rg}(A - \lambda I_m) \neq m$

► $\det(A - \lambda I_m) = 0$

$(\Leftrightarrow) \lambda$ est une racine de χ_A

► $A - \lambda I_m$ n'est pas inversible.

95) Soit $A \in \mathcal{M}_m(K)$

$$\chi_{A^T} = \det(X I_m - A^T) = \det((X I_m - A^T)^T) = \det(X I_m^T - (A^T)^T) = \det(X I_m - A) = \chi_A$$

donc $\mathcal{G}_p(A) = \mathcal{G}_p(A^T)$ avec les mêmes multiplicités

95) Les assertions sont équivalentes:

► A est diagonalisable sur K .

► Il existe une base de $\mathcal{M}_m(K)$ formée de vecteurs propres de A

► $\mathcal{M}_m(K) = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{G}_{\text{pik}}(A)} E_\lambda$

► $\sum_{\lambda \in \mathcal{G}_{\text{pik}}(A)} \dim(E_\lambda) = m$

► χ_A est scindé et $\forall \lambda \in \mathcal{G}_p(A), m_\lambda = \dim(E_\lambda)$

► $\prod_{\lambda \in \mathcal{G}_{\text{pik}}(A)} (X - \lambda)$ est annulateur de A

► Il existe un polynôme scindé à racines simples annulateur de A sur K

Pour la trisectibilité:

► A est trisectible sur K

► χ_A est scindé sur K .

96) On pose $\varphi_A: X \mapsto AX$ l'endomorphisme canoniquement associé à A .

On note E la base canonique de $\mathcal{M}_m(K)$ et B une base de $\mathcal{M}_m(K)$ formée des vecteurs propres de A (existe car A diagonalisable)

D'après les formules de changements de bases: $\text{Mat}_E(\varphi_A) = P_{EB} \text{Mat}_B(\varphi_A) P_{BE}$

donc $A = PDP^{-1}$ avec $P = P_{\lambda \in B}$

q7) On a $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$

- si $m_\lambda = 1$ (ie λ est une racine simple de χ), $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$
- si la matrice est diagonalisable, $m_\lambda = \dim(E_\lambda)$

q8) a: Par le théorème de Cayley-Hamilton, χ_A est annulateur de A , si A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$, $\chi_A = \prod_{k=1}^p (x - \lambda_k)^{m_k}$ (car λ_k est racine sur $\mathbb{R}$)

b: Le polynôme annulateur de A (polynôme minimal) est $\varphi = \prod_{k=1}^p (x - \lambda_k)$ de plus petit degré

car on sait que le contraire c'est un polynôme annulateur de A et réciproquement, si P vérifie $P(A) = 0$ ($P \neq 0$)

q9) A est triangulaire, donc ses valeurs propres sont sur la diagonale. alors on sait que $\forall \lambda \in \mathbb{C}, p \geq 1$, λ^p est une racine de P

donc $\mathcal{S}_p(A) = \{1\}$ avec $m_1 = 3$

de plus, $A - 1I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\prod_{k=1}^p (x - \lambda_k) \mid P$, donc $\deg P \geq p$ (car $P \neq 0$).

$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, C_2 et C_3 sont non alignées

$\parallel$
 $\text{rg}(A - I_3) \leq 2$

$\parallel$
 $\text{rg}(A - I_3) \geq 2$

et c'est le seul polynôme annulateur de degré p on ajoute la condition unitaire.

donc $\text{rg}(A - I_3) = 2$

donc $\dim(E_1) = 1 \neq m_1$

donc A n'est pas diagonalisable.

OU, 1 est l'unique valeur propre de A et $A \neq 1I_3$ donc A n'est pas diagonalisable.

preuve: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$ / $\mathcal{S}_p(A) = \{\alpha\}$

A est diagonalisable $\Leftrightarrow \dim(E_\alpha) = m_\alpha = n \Leftrightarrow \text{rg}(A - \alpha I_n) = 0 \Leftrightarrow A = \alpha I_n$

$\parallel$
 $X - \alpha$ est annulateur de A
i.e. $A = \alpha I_n$

α unique VP
et $\deg(\chi_A) = n$

de même $\mathcal{S}_p(B) = \{1, -1, 2\}$, donc B a 3 valeurs propres distinctes

donc B est diagonalisable

$\mathcal{S}_p(C) = \{1, 2\}$, déterminons $\dim(E_2)$.

$$C - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = 0_{3,1} \Rightarrow \text{rg}(C - 2I_3) \leq 2$$

C_2 et C_3 sont colinéaires et non nulle $\Rightarrow \text{rg}(C - 2I_3) \geq 1$
 et $\text{rg}(C - 2I_3) \leq 1$

donc $\text{rg}(C - 2I_3) = 1$

donc $\dim(E_2) = 2 = m_2$

donc C est diagonalisable

► $\mathcal{G}_p(D) = \{1, 2\}$, déterminons $\dim(E_2)$.

$$D - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = 0_{3,1}$$

$$\Rightarrow \text{rg}(D - 2I_3) \leq 2$$

($C_1 \neq 0_{3,1}$ et C_2 et C_3 sont non colinéaires $\Rightarrow \text{rg}(D - 2I_3) \geq 2$)
 inutile

donc $\text{rg}(D - 2I_3) = 2$

donc $\dim(E_2) = 1 \neq m_2 = 2$

donc D n'est pas diagonalisable

► $E \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ donc est diagonalisable par le théorème spectral.

pb) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & -\frac{3}{2} \\ 4 & 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$

On a $C_1 \neq 0_{4,1}$ et $C_2 = 2C_1$, $C_3 = -C_1$ et $C_4 = -\frac{1}{2}C_1$

donc $\text{rg}(A) = 1$

donc $\dim(\text{Ker}(A)) = \dim(\text{Ker}(A - 0I_4)) = 3$

donc $0 \in \mathcal{G}_p(A)$ et $m_0 \stackrel{①}{=} 3$

χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert - Gauss, donc $\sum_{\lambda \in \mathcal{G}_p(A)} \lambda = \text{tr}(A)$

donc on obtient λ la dernière valeur propre de A, $\lambda = 0 \in \mathbb{R}$.

donc $\mathcal{G}_p(A) = \{0\}$

donc $m_0 = 3 \neq \dim(E_0) = 3$

donc A n'est pas diagonalisable

Par ailleurs, $\chi_A = (X-0)^4 = X^4$

donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, donc A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

q11) On note $\varphi_n: \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ X \mapsto MX \end{cases}$ (en identifiant $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$)

On a $\varphi_n^2 = I_n$ donc $\varphi_n \circ \varphi_n = Id$

donc φ_n est inversible & inverse φ_n et c'est une symétrie

de plus $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de M à racines simples
donc M est diagonalisable.

Par ailleurs $\mathcal{G}_p(M) \subset \{-1, 1\}$

Par l'absurde supposons que $-1 \notin \mathcal{G}_p(M)$

Comme M est diagonalisable et $\mathcal{G}_p(M) = \{1\}$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) / M = P I_n P^{-1} = I_n$, absurde
de même pour 1

d'où $\mathcal{G}_p(M) = \{-1, 1\}$

⊙ Supposons $-1 \notin \mathcal{G}_p(M)$.

alors $M + I_n$ est inversible.

Comme $(M + I_n)(\pi - I_n) = O_n$, alors $\pi - I_n = O_n$, absurde.

q12) X^2 est annulateur de M , donc $\mathcal{G}_p(M) \subset \{0\}$.

De plus, M a n valeurs propres complexes, donc $0 \in \mathcal{G}_p(M)$
et $0 \in \mathbb{R}$

d'où $\mathcal{G}_p(M) = \{0\}$

⊙ si $0 \notin \mathcal{G}_p(M)$ alors M inversible

donc en multipliant à gauche par π^{-1} l'équation $M^2 = O_n$,
on trouve $I_n = O_n$, absurde!

q13) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\lambda \in \mathcal{G}_p(2M - I_n) \Leftrightarrow \lambda_{2M - I_n}(\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - 2M + I_n) = 0$

$\Leftrightarrow \det\left(2\left[\frac{\lambda+1}{2}I_n - M\right]\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2^n \det\left(\frac{\lambda+1}{2}I_n - M\right) = 0$

$2^n \neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{\lambda+1}{2} \in \mathcal{G}_p(M)$

⊙ $\rightarrow$ donc aussi les sous-espaces
propres (en demandant les éléments
propres):

$MX = \lambda X \Leftrightarrow 2MX - X = 2\lambda X - X$

$\Leftrightarrow (2\pi - I_n)X = (2\lambda - 1)X$

On en déduit:

• λ up de $M \Leftrightarrow \exists x \in M_{n,1} \setminus \{0_n\}, \pi x = \lambda x$

$\Leftrightarrow 2\lambda - 1$ up de $2\pi - I_n$

• $x \in E_\lambda(M) \Leftrightarrow x \in E_{2\lambda-1}(2\pi - I_n)$.

Ainsi: $\mathcal{G}_p(2M - I_n) = \left\{ \lambda, \frac{\lambda+1}{2} \in \mathcal{G}_p(M) \right\}$

donc $\mathcal{G}_p(2M - I_n) = \{2\mu - 1, \mu \in \mathcal{G}_p(M)\}$ "changement de variable", $\mu = \frac{\lambda+1}{2}$

III) Espaces Euclidiens

q1) a: $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire lorsque:

- φ est ^{une forme} bilinéaire: $\forall u \in E, \begin{cases} f: x \mapsto \varphi(x, u) \in \mathcal{L}(E) \\ g: x \mapsto \varphi(u, x) \in \mathcal{L}(E) \end{cases}$
- φ est symétrique: $\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$
- φ est positive: $\forall u \in E, \varphi(u, u) \geq 0$
- φ est définie positive: $\left[\varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0_E \right]$

b: Le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, qu'on note (1.1) est définie par:

$$\text{Pour tout } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad \langle X | Y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i = X^T Y$$

c: En notant (1.1) un produit scalaire quelconque et $\|\cdot\|$ sa norme associée:

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Il y a égalité si et seulement si: $\exists a \in \mathbb{K} / \begin{cases} x = ay \\ \text{ou } y = xa \end{cases} \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont colinéaires}$

d: On pose $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_m[X])^2, f: t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t} \in \mathcal{C}([0; +\infty[)$

de plus, $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_m[X])^2, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(t) = 0$ par croissance comparée (on saurait préciser)

donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \forall t \in [1; +\infty[, \frac{1}{t^2} \geq 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge ($2 > 1$)

donc l'application $\varphi: (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) dt$ est bien définie

► Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_m[X])^2$

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t} dt = \varphi(Q, P)$$

donc φ est symétrique.

► Soit $(P_1, P_2, Q) \in (\mathbb{R}_m[X])^3, \lambda \in \mathbb{K}$

$$\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \int_0^{+\infty} (\lambda P_1 + P_2)(t)Q(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} (\lambda P_1(t)Q(t) + P_2(t)Q(t))e^{-t} dt$$

Comme $\int_0^{+\infty} P_1(r) Q(r) e^{-r} dr$ et $\int_0^{+\infty} P_2(r) Q(r) e^{-r} dr$ convergent, par linéarité

$$\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \lambda \int_0^{+\infty} P_1(r) Q(r) e^{-r} dr + \int_0^{+\infty} P_2(r) Q(r) e^{-r} dr = \lambda \varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)$$

donc φ est linéaire par rapport à la 1^{re} variable.

Par symétrie φ est linéaire par rapport à la 2^{de} variable

donc φ est bilinéaire.

► Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$

$$\varphi(P, P) = \int_0^{+\infty} P^2(r) e^{-r} dr$$

or plus, $\forall t \in \mathbb{R}_+, P^2(t) e^{-t} \geq 0$

par (naissance) de l'intégrale, (les intégrales convergent), $\int_0^{+\infty} P^2(r) e^{-r} dr \geq \int_0^{+\infty} 0 dr = 0$

donc $\varphi(P, P) \geq 0$

donc φ est positive.

► Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$.

On suppose que $\varphi(P, P) = 0$

~~$\forall t \in \mathbb{R}_+, P^2(t) e^{-t} \geq 0$, donc $\int_0^{+\infty} P^2(r) e^{-r} dr \geq 0$ et $\int_0^1 P^2(r) e^{-r} dr \geq 0$~~

~~Ainsi, $\int_0^{+\infty} P^2(r) e^{-r} dr \geq \int_0^1 P^2(r) e^{-r} dr \geq 0$~~

~~donc par encadrement $\int_0^1 P^2(t) e^{-t} dr = 0$ Pas d'intérêt.~~

On a $f: t \mapsto P^2(t) e^{-t} \in \mathcal{C}([0; +\infty[), \forall t \in [0; +\infty[, P^2(t) e^{-t} \geq 0$

donc $\forall t \in [0; +\infty[, P^2(t) e^{-t} = 0$

donc $P(t) = 0$

Ainsi, P a une infinité de racines, donc $P = 0_{\mathbb{R}_m[X]}$

IMPORTANT:
hyp: continue
positive

quantificateurs

infinité de racines

donc φ est définie positif

Ainsi $\varphi: (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(r)Q(r)e^{-r}dr$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\forall (P, Q) \in (R_m[X])^2$, $\left| \int_0^{+\infty} P(r)Q(r)e^{-r}dr \right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} P^2(r)e^{-r}dr} \sqrt{\int_0^{+\infty} Q^2(r)e^{-r}dr}$

q2) a: $(x, y) \in E^2$ sont orthogonaux lorsque $\langle x, y \rangle = 0$

b: F est l'orthogonal de G lorsque $F = \{x \in E / \forall y \in G, \langle x, y \rangle = 0\}$

c: $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonal si et seulement si $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2 / i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = 0$

d: $(u_1, \dots, u_p)$ est orthonormée si et seulement si $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

e: p est la projection orthogonale sur F lorsque $p: \begin{cases} E = F \oplus F^\perp \longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 \longmapsto x_1 \end{cases}$

est inversible et

f: $M \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque $M^T = M^{-1} \Leftrightarrow MM^T = I_n \Leftrightarrow M^T M = I_n$

q3) a: $x \perp y \Leftrightarrow x \in (\text{Vect}(y))^\perp$

$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, u_i \perp x \Leftrightarrow x \in (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp$

q4) Si $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale, par le théorème de Pythagore, $\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2$

linéarité + symétrie

De manière analogue à la généralisation de la variance d'une somme de var, on a:

$$\left\| \sum_{i=1}^m u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \|u_i\|^2 + \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1; m \rrbracket^2 \\ i \neq j}} \langle u_i, u_j \rangle \stackrel{\text{symétrie}}{=} \sum_{i=1}^m \|u_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \langle u_i, u_j \rangle$$

Remarque: $(X, Y) \mapsto \text{cov}(X, Y)$ a les mêmes propriétés qu'un produit scalaire (sauf la définie positivité), la formule de la covariance est un cas particulier de cette formule. C'est à partir aussi par laquelle on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz (le caractère défini n'est pas utile).

q5) $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad u_i = \langle u, e_i \rangle$

$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ (comme pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$)
 $= X^T Y = (X | Y)$

$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$

q6) Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre dans E .

on pose $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ ($\|u_1\| \neq 0$ car $u_1 \neq 0_E$)

On définit $(v_i)_{i \in \llbracket 2; p \rrbracket}$ par récurrence telle que pour tout $i \in \llbracket 2; p \rrbracket$:

$v_i = u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle u_i, e_k \rangle e_k$

$= u_i - P_{\text{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1})}(u_i) = P_{(\text{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}))^\perp}(u_i)$

$e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$

Alors $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille (libre et) orthormée de E .

Si on applique ce procédé sur une base de E , on obtient une base orthormée de E .

q7) f est une isométrie si et seulement si: $\text{Mat}_B(f)$ est orthogonale.

IMPORTANT
à bien mémoriser

f est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si: $\text{Mat}_B(f)$ est symétrique réelle.

q8) a: Une projection orthogonale est un endomorphisme autoadjoint, pas forcément une isométrie. (C'est une isométrie que dans le cas où on projette sur E).

b: Une réflexion est une isométrie, pas forcément un endomorphisme autoadjoint. (C'est une isométrie orthogonale).

c: Les rotations sont des isométries vectorielles d'un plan, pas forcément des endomorphismes autoadjoints. $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ symétrique $\Leftrightarrow \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta \in 0(\pi)$.

q9) f est une projection orthogonale si et seulement si:

$M^2 = M$ (M est une projection)

$M^T = M$ (M est un endomorphisme autoadjoint)

(car base canonique et orthormée pour le produit scalaire canonique)

q20) Pour le théorème spectral A est orthogonalement diagonalisable.

On note $\varphi_A: X \mapsto AX$.

φ_A est diagonalisable dans une base B orthonormée.

→ On peut s'obtenir en orthogonalisant chaque base de sous-espaces propres puis en combinant.

En notant E la base canonique de $M_{m,n}(\mathbb{R})$, par les formules de changement de base :

$$\text{Mat}_E(\varphi_A) = P_{E,B} \text{Mat}_B(\varphi_A) P_{B,E}$$

Comme B et E sont orthonormées, $P_{E,B}$ est orthogonale

$$\text{d'où } \underline{A = P D P^T} \quad \text{avec } P = P_{E,B}$$

q21) Soit $A \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R})$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire de $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

- A est positive lorsque $\forall X \in M_{m,n}(\mathbb{R}), \langle AX, X \rangle \geq 0$

si et seulement si $\mathcal{S}_p(A) \subset [0; +\infty[= \mathbb{R}_+$

- A est définie positive lorsque $\forall X \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{m,n}\}, \langle AX, X \rangle > 0$

si et seulement si $\mathcal{S}_p(A) \subset]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$