

Questionnaire Analyse

I) Sur les séries numériques

q1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

a) G_1 : - APCR, $u_n \geq v_n$

- APCR, $v_n \geq 0$

• si $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ CV

• si $\sum_{n \geq 0} v_n$ DV, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ DV

b) G_2 : - $u_n \sim v_n$

- APCR, $v_n \geq 0$ (resp. $u_n \geq 0$)

Alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ CV si et seulement si $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV

c) G_3 : - APCR, $u_n > 0$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}_+$

Alors : - si $l > 1$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ DV

- si $l < 1$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV

- si $l = 1$ on ne peut pas conclure.

d) G_4 : - $\sum_{n \geq 0} u_n$ est alternée

- $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

- $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

Alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV et $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \geq \left| \sum_{k=n}^{\infty} u_k \right|$ et $\sum_{k=n}^{\infty} u_k$ est de même signe que u_n .

e) On note $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} u_p v_q = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$

g: $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent absolument, alors $\sum_{n \geq 0} c_n$ converge absolument

$$\text{et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

q2) a: g: - $\forall m \in \mathbb{N}, u_m \geq 0$ et $v_m \geq 0$

$$\text{OU}$$

$$- \sum_{n \geq 0} u_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} v_n \text{ convergent} //$$

) et préciser si on n'est pas dans le contexte des probabilités.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
(linéarité)

g: - $\forall (n, h) \in \mathbb{N} \times [0; N], u_{n,h} \geq 0$

$$\text{OU}$$

$$- \forall h \in [0; N], \sum_{n \geq 0} u_{n,h} \text{ CV} //$$

Alors $\sum_{h=0}^N \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,h} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{h=0}^N u_{n,h}$

b: g: $\sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV}$, alors $\sum_{n \geq 0} I_n(u_n) \text{ CV}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} I_n(u_n) = I_n\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$

c: g: $\sum_{n \geq 0} u_{2n}$ et $\sum_{n \geq 0} u_{2n+1} \text{ CV}$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}$

d: g: $\sum_{n \geq 0} |u_n| \text{ CV}$, alors $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

($|u_n|$ est positive, si elle diverge elle vaut $+\infty$ donc le résultat est vrai)
OK pour le cas où $\sum u_n \text{ CV}$
mais à réserver aux probabilités.

e: g: - $\forall m \in \mathbb{N} \quad v_m \geq u_m$

$$- \sum_{n \geq 0} v_n \text{ CV}$$

$$- \sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV} \quad \text{OU } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est positive}$$

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \geq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

f: g: $\sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV}$, alors $\sum_{n=k}^{+\infty} u_n \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ (guich des restes)

3) - $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{e^n}{n!} \neq 0$

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{n+1}}{e^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0 < 1$$

trouble puisqu'il s'agit d'une série absolue.

donc par le critère de d'Alembert $\sum_{n \geq 0} \frac{e^n}{n!}$ converge.

et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{n!} = e$ (c'est évident) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{n!} - \frac{e^0}{0!} = e - 1$

$\Rightarrow e - 1$ dans l'exercice.

$\Rightarrow \left| \frac{1}{2} \right| < 1$ donc $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ CV

et $\sum_{n=10}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{\frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}}$

donc $\sum_{n=10}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{2^9}$

$\Rightarrow$ Une somme finie existe toujours et $2 \neq 1$

donc $\sum_{n=1}^8 2^n = 2^1 \times \frac{1-2^9}{1-2} = \frac{2^1 - 2^{10}}{1-2}$ (formule arithmétique)

donc $\sum_{n=1}^8 2^n = 2(2^8 - 1)$

$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} > 0$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV ($2 > 1$)

donc par comparaison $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n+1)}$ CV

de plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

donc $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

$= \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$

d'où $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$ (téléscopage)

46) $\forall n \in \mathbb{N}^*,$ on note $u_n = \frac{1}{n^2 \ln(n)}$

$\Rightarrow$ suite d'écris (on définit pour $n=1$)

► Si $\alpha < 1$.

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}}{\ln(n)} = +\infty \text{ par croissance comparée.}$$

Ainsi, RPCR, $m_n \geq 1$

$$\textcircled{a} \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{m_n}\right)_{n \rightarrow +\infty}$$

$$\text{dnc } u_n \geq \frac{1}{m_n} \geq 0$$

$$\text{ou } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{m_n} \text{ DV (série harmonique)}$$

$$\textcircled{b} \text{ Divergence}$$

$$\text{dnc } \sum_{n \geq 2} u_n \text{ DV}$$

► Si $\alpha > 1$.

on pose $p \in \mathbb{R} / 1 < p < \alpha$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} m^p u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{p-\alpha}}{\ln(n)} = 0 \quad (p-\alpha < 0)$$

$$\text{Ainsi, } u_n = o\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n^p} \geq 0 \quad \text{et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p} \text{ CV } (p > 1)$$

$$\text{dnc par comparaison, } \sum_{n \geq 2} u_n \text{ CV.}$$

► Si $\alpha = 1$.

$$\text{on pose } f: x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)} \in \mathcal{C}([2; +\infty[)$$

f est décroissante et positive sur $[2; +\infty[$.

Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, soit $k \in [2; m]$.

$$\forall \ell \in [k; k+1], f(k-1) \leq f(\ell) \leq f(k) \text{ par décroissance de } f.$$

$$\text{par existence de l'intégrale, } f(k-1) \leq \int_{k-1}^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

$$\text{dnc } \sum_{k=2}^{m-1} f(k-1) \leq \int_2^m f(t) dt \leq \sum_{k=2}^m f(k)$$

$$\text{dnc } S_m - f(2) \leq \int_2^m f(t) dt \leq S_m - f(m) \quad \text{avec } S_m = \sum_{k=2}^m f(k)$$

$$\text{dnc } \int_2^m f(t) dt + f(2) \geq S_m \geq \int_2^m f(t) dt + f(m)$$

$$\text{de plus, } \int_2^m f(t) dt = \int_2^m \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int_2^m \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx = \left[\ln(\ln(x)) \right]_2^m = \ln(\ln(m)) - \ln(\ln(2))$$

$$\text{dnc} \quad \ln(\ln(n)) \left[1 - \underbrace{\frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2\ln(2)\ln(\ln(n))}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} \right] \geq S_n \geq \ln(\ln(n)) \left[1 - \underbrace{\frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} \right]$$

$$\text{dnc} \quad S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

On peut vérifier
pour ce qui nous intéresse
ici.

$$\text{dnc} \quad \sum_{n \geq 2} f(n) \quad \text{DV.}$$

$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

Donc c'est suffisant

(pas besoin d'un écartant etc.)

$$\forall n \geq 3, \quad S_n \geq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

$$\text{dnc} \quad S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Conclusion:

si	$\alpha > 1$,	$\sum_{n \geq 2} u_n$	CV
si	$\alpha \leq 1$,	$\sum_{n \geq 2} u_n$	DV

qs) a: $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(2)}{n} \quad \text{DV}$ dnc on ne peut pas dire $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)} \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(2)}{\ln(n)}$

Qu'on ne manipule pas des sommes
infinies avant d'avoir prouvé leur
existence.
On pouvait éventuellement dire que
mais à condition d'être sûr que
les deux sommes étaient
des termes positifs.
Ceci est mauvais.

On a bien, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)} \stackrel{(*)}{\geq} \frac{\ln(2)}{n} \geq 0$

et $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(2)}{n} \quad \text{DV}$

dnc par comparaison $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)} \quad \text{DV}$

b: Pour utiliser la comparaison par équivalence il faut la positivité et $n! \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) n!$

$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ne sont positifs.

On a besoin de s'écrire pour le
justifier: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^n > e^n - 1 > 0$
dnc $\ln(e^n) > \ln(e^n - 1) > 0$
dnc $\frac{1}{n} < \frac{1}{e^n - 1}$

On a $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^{3n}}{3! n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

• Par le critère de Leibniz $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (hypothèse déjà vérifiées)

• $\left| \frac{(-1)^{3n}}{3! n^{3/2}} \right| = \frac{1}{3! n^{3/2}}$

et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{CV} \quad \left(\frac{3}{2} > 1\right)$

dnc $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{3! n^{3/2}} \quad \text{CV absolument, dnc CV.}$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$ et $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{CV}$

dnc $\sum_{n \geq 1} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \quad \text{CV}$

Ainsi par linéarité $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{CV.}$

② $\frac{(-1)^{3n}}{3! n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \sim \frac{(-1)^{3n+1}}{3! n^{3/2}}$
dnc $\left| \frac{(-1)^{3n}}{3! n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right| \sim \frac{1}{6 n^{3/2}}$

c: Il y a plusieurs encadrements; - il faut vérifier la ^{taille} positivité pour le critère de d'Alembert
- c'est une implication pas une équivalence

$$\text{On a } R\left(\sum_{n \geq 0} nx^n\right) = R\left(\sum_{n \geq 0} x^n\right) = 1$$

$$\text{donc } \forall x \in]-1, 1[, \sum nx^n \text{ CV}$$

$$\text{et } \forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, \sum nx^n \text{ DV.}$$

de plus, $\sum_{n \geq 1} (-1)^n$ et $\sum_{n \geq 1} n$ DVG

$$\text{donc } \sum_{n \geq 0} nx^n \text{ converge } \Leftrightarrow |x| < 1$$

II) Sur les suites et séries de fonctions

q1) a: $\|f\|_{\infty}^I = \sup_{x \in I} (\|f(x)\|)$ $\rightarrow$ C'est le plus petit des majorants de l'ensemble $\{\|f(x)\|, x \in I\}$.

b: $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est un majorant de $\{\|f_n(x) - f(x)\|, x \in I\}$ et $\|f_n - f\|_{\infty}^I$ en est le plus petit

$$\text{donc } 0 \leq \|f_n - f\|_{\infty}^I \leq u_n$$

$$\text{Non } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty}^I = 0$$

~~le théorème des gérances @ le théorème d'encadrement~~

donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU vers f sur I .

c: $\forall n \in \mathbb{N}$, v_n est un majorant de $\{\|f_n(x)\|, x \in I\}$ et le sup en est le plus petit

$$\text{donc } 0 \leq \|f_n\|_{\infty}^I \leq v_n$$

donc par comparaison $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty}^I$ CV

donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ CVN sur I .

q2) $\sum_{n \geq 0} f_n$ CVS sur I lorsque $\forall x \in I, \sum_{n \geq 0} f_n(x)$ CV

$\left(\sum_{n \geq 0} f_n \text{ CVA sur } I \text{ lorsque } \forall x \in I, \sum_{n \geq 0} \|f_n(x)\| \text{ CV} \right)$

C'est pas une notion au programme pour les séries de fonctions.

$\cdot \sum_{n \geq 0} f_n$ CVU sur I lorsque $\left(\sum_{k=0}^n f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU sur I $\Leftrightarrow \sum f_n$ CVS + (R_n) CVU sur I

$\cdot \sum_{n \geq 0} f_n$ CVN sur I lorsque $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty}^I$ CV

$\rightarrow$ Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ CVN, alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ CVU, CVA et CVS

et (R_n) et (f_n) CVU vers la fonction nulle

► $g: \sum_{n \geq 0} f_n$ CVO, alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ CVS
 et (f_n) et (R_n) CVO vers la fonction nulle

► $g: \sum_{n \geq 0} f_n$ CVA, alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ CVS
 et (f_n) et (R_n) CVS vers la fonction nulle

► $g: \sum_{n \geq 0} f_n$ CVS, alors (f_n) et (R_n) CVS vers la fonction nulle

93) ► $g: \dots$ I est un segment

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVO sur I

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

► $g: \dots$ (f_n) CVS sur I (Théorème de convergence dominée)

- Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

94) a: Il ^{suffit} ~~faut~~ que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ par linéarité de la continuité pour une somme finie

Pour $\sum_{n \geq 0} f_n$ il ^{suffit} ~~faut~~ : - $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$
 - $\sum_{n \geq 0} f_n$ CVO sur I.

b: Il ^{suffit} ~~faut~~ que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ par linéarité de la classe $\mathcal{C}^1$ pour une somme finie

Pour $\sum_{n \geq 0} f_n$ il ^{suffit} ~~faut~~ : - $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$
 - $\forall i \in \mathbb{N}, \sum_{n \geq 0} f_n^{(i)}$ CVS sur I (avec $f_n^{(0)} = f_n$)
 - $\sum_{n \geq 0} f_n^{(2)}$ CVO sur I

c: Il ^{suffit} ~~faut~~ que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I f_n$ CV par linéarité de l'intégrale convergente pour une somme finie.

Pour montrer l'égalité $\int_I \sum_{n \geq 0} f_n = \sum_{n \geq 0} \int_I f_n$, par ordre de complexité on a:

- $\mathcal{G}_1$: - I est un segment
 - $\forall m \in \mathbb{N} \quad f_m \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$
 - $\sum_{n \geq 0} f_n$ CVU sur I

alors l'égalité est vraie

- $\mathcal{G}_2$: - $\sum_{n \geq 0} f_n$ CVS sur I
 - $\forall m \in \mathbb{N}, f_m$ est intégrable sur I
 - $\sum_{n \geq 0} \int_I |f_n| < +\infty$

alors l'égalité est vraie

→ Théorème de convergence dominée appliqué à la suite des sommes partielles.

- $\mathcal{G}_3$: - $(\sum_{k=0}^n |f_k|)_{n \in \mathbb{N}}$ CVS sur I

- si existe une fonction φ intégrable sur I telle que $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times I, |\sum_{k=0}^n f_k(x)| \leq \varphi(x)$

Par le théorème de convergence dominée et l'égalité $\sum_{n=0}^N \int_I f_n = \int_I \sum_{n=0}^N f_n$

on a bien $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$

q5) Soit a une borne de I finie ou non.

$\mathcal{G}_1$: - $\forall m \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a} f_m(x) = l_m \in \mathbb{R}$

- $\sum_{n \geq 0} f_n$ CVU sur I

alors $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$

q6) On peut montrer la convergence uniforme sur tout segment $[a; b] \subset I$, par propriété locale de la continuité / classe $\mathcal{C}^1$, on obtiendra le résultat souhaité

► On peut élargir l'intervalle I pour en prendre un "plus petit". La seule hypothèse à respecter est qu'il y ait une borne de cet intervalle.

q7) Soit $x \in I$. Soit $y \in I$. On suppose $x < y$.

Soit $h \in I / x < h < y$ (on a $y = x + h$ avec $h > 0$ mais ça ne sert à rien)

On a par croissance des f_n , $\forall m \in \mathbb{N} \quad f_n(x) \leq f_n(h)$

d'où par croissance de la somme convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(h)$

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est croissante sur I .

→ à retenir qu'il n'est pas toujours utile de calculer la dérivée pour étudier la variabilité.

q8) On peut penser à développer f en série entière sur I (si possible) puis intégrer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\int_I$.

↳ On essaie de faire intervenir une ~~autre~~ intégrale

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I a_n x^n dx$$

III) Sur les séries entières

q1) $R\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ / (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$

q2) $G: -$ APCR, $a_n \neq 0$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$$

alors $R\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \frac{1}{\rho}$

q3) a: $G: |x| < R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ CVA et $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et CV vers 0. plus fort

b: $G: |x| > R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ DVG et $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ DV et n'est pas bornée plus fort

c: $G: |x| = R$ on ne peut pas conclure:

$$R\left(\sum_{n=0}^{\infty} n x^n\right) = R\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n\right) = R\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n\right) = 1$$

- a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge pour $x \in \{ -R; R \}$ donc CVA

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ne converge que pour $x = -1$ mais $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et pas de CVA absolue

et $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ ne converge ni pour $x = 1$, ni pour $x = -1$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(-1)^n n}$ n'a pas de limite

q4) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge normalement sur tout segment inclus dans le disque ouvert d'intervalle

de convergence

Dans l'intervalle de convergence il n'y a pas forcément convergence normale

$$R\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \left\| \sum_{k=0}^n x^k \right\|_{\infty}^{R_{[-1;1]}} = 1 \text{ si } \forall n \in \mathbb{N}, f: x \mapsto x^n$$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \sum_{k=0}^n x^k \right\|_{\infty}^{R_{[-1;1]}}$ DVG.

q5) La dérivation et l'intégration ne changent pas le rayon de convergence et on peut

intégrer/dériver directement sous la somme.

q6) $\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq P(X=m) \leq 1$

donc $\{P(X=m)\}_{m \in \mathbb{N}} = O(1)$

donc $R\left(\sum_{m \geq 0} P(X=m)x^m\right) \geq R\left(\sum_{m \geq 0} x^m\right) = 1$

De plus, $]-1;1[\subset]-R;R[$, donc $Q_x \in \mathcal{E}^\infty(]-1;1[)$ en fait que somme le séries entière.

On note $f_m: x \mapsto P(X=m)x^m$.

$\forall m \in \mathbb{N}, f_m \in \mathcal{E}([-1;1])$

$\forall m \in \mathbb{N}, \|f_m\|_{\infty}^{[-1;1]} = P(X=m)$ (maximum atteint en 1)

on $\sum_{m \geq 0} P(X=m) = 1$, donc $\sum_{m \geq 0} f_m$ CVN, donc CVU sur $[-1;1]$.

⊗ $\sum P(X=m)$ CV par σ -additivité (car la suite des $(f_m)_{m \geq 0}$ est 2 à 2 incompatible)

Ainsi $G_x \in \mathcal{E}([-1;1])$

q7) f est développable en série entière au voisinage de 0 lorsque il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $(a_m) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

tels que $\forall x \in]-R;R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

q8) - $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

- $\forall x \in]-1;1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

- $\forall x \in]-1;1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

- $\forall x \in]-1;1[, \operatorname{arctan}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

- $\forall x \in]-1;1[, \forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

Cas $\alpha \in \mathbb{N}$: formule du binôme.

q8) Soit $x \in \mathbb{R}$.

quel nombre vérifie la forme d'un sin cos

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = -\frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{x}$$

De plus, $\forall m \in \mathbb{N}^+$, $f_m(0) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } m=1 \\ 0 & \text{si } m \geq 2 \end{cases}$

donc $\sum_{m=1}^{+\infty} f_m(0) = -\frac{1}{2}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} f_m(x)$ (il s'agit bien d'une somme de type $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (important))

Donc f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$
 d'où $f \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

IV) Sur l'intégration

q1) Soit $m \in \mathbb{N}^+$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{m^2 + km}} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{m}}}$$

de plus, $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} \in \mathcal{C}([0;1])$

Ainsi: $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{m^2 + km}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{u}} du = \left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}} u^{1-\frac{1}{2}} \right]_1^2$

$u = 1+x$
 $du = dx$

x	0	1
u	1	2

d'où $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{m^2 + km}} = 2(\sqrt{2} - 1)$

q2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P^2(x) \geq 0$

de plus, $P \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$

Comme $\int_0^1 P^2(t) dt = 0$, $\forall t \in [0;1]$, $P^2(t) = 0$

donc $\forall t \in [0;1]$, $P(t) = 0$

Ainsi, P a une infinité de racines

donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

q3) a: Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent, alors $\int_a^b f+g$ converge et $\int_a^b (f(t)+g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$

b: $\int_a^b f$ converge si et seulement si il existe $c \in]a; b[$ / $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent

donc ce cas $\forall c \in]a; b[$, $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$
 On a également ceci dès que la 3^e intégrale converge (sans avoir nécessairement c entre a et b).

c: Si $\int_a^b f$ CV, alors $\int_a^b \operatorname{Re}(f)$ CV et $\operatorname{Re}\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$

d: Si f est intégrable sur $[a; b]$, alors $\left|\int_a^b f(t) dt\right| \leq \int_a^{\max(a,b)} |f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt$

si $a \leq b$

⊗ f est continue sur $[a; b]$

positive sur $[a; b]$,

$\exists c \in [a; b]$ tq $f(c) > 0$

et $\int_a^b f$ CV alors $\int_a^b f > 0$.

e: Si f est positive sur $[a; b]$ et $\int_a^b f$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

OK mais corrigé!

De plus, en notant $(a_0, \dots, a_m)$ une subdivision adaptée à f , si il existe $c \in [a; b]$

entant que fonction continue, par maximum

avec $\forall i \in [0; m]$ $c \neq a_i$ telle que $f(c) > 0$, $\int_a^b f(t) dt > 0$

c doit être un point où f est localement continue.

Par exemple en posant $f: x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f est positive sur $[-1; 1]$ et $\int_{-1}^1 f$ CV

de plus $f(0) = 1 > 0$

on $\int_{-1}^1 f(t) dt = 0$, d'où la nécessité de prendre un point de continuité.

f: Si $\int_0^{+\infty} f$ CV, alors $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$

* Si $\exists c \in \mathbb{R} / \int_c^{+\infty} f(t) dt$ CV, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_c^x f(t) dt = 0$

Analogues à la suite des
reste qui CV vers 0 pour
les séries

car $\forall x > c, \int_c^{+\infty} f = \int_c^x f + \int_x^{+\infty} f$
 $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_c^{+\infty} f$

$f(t) = t \mapsto \frac{\ln(t)}{t} \in \mathcal{C}([0; \frac{1}{2}])$

$\forall t \in [0; \frac{1}{2}], \frac{\ln(t)}{t} \leq \frac{\ln(\frac{1}{2})}{t}$

donc $-\frac{\ln(t)}{t} \geq -\frac{\ln(\frac{1}{2})}{t} > 0$

de plus, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(\frac{1}{2})}{t} dt$ DV

donc par comparaison, $\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\ln(t)}{t} dt$ DV

donc par limite $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(t)}{t} dt$ DV.

(produit par une constante non nulle d'une fonction intégrée.)

$\Rightarrow f: t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \in \mathcal{C}([0; \frac{1}{2}])$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(t) t^{\frac{1}{4}} = 0$ par comparaison

donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/4}}\right)$

de plus, $\forall t \in]0; \frac{1}{2}]$, $\frac{1}{t^{3/4}} \geq 0$ et $\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{3/4}} dt < \infty$ CV $\left(\frac{3}{4} < 1\right)$

donc par comparaison $\left| \int_0^{1/2} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt \right| < \infty$ CV

► $f: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t} \ln(t)} \in \mathcal{C}([2; +\infty[)$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) t^{3/4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{1/4}}{\ln(t)} = +\infty$ par croissance comparée.

donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t^{3/4}}}{f(t)} = 0$

donc $\frac{1}{t^{3/4}} = o\left(f(t)\right)$

de plus, $\forall t \in [2; +\infty[$, $f(t) \geq 0$ et $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{3/4}} dt < \infty$ DV $\left(\frac{3}{4} \leq 1\right)$

donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t} \ln(t)} dt < \infty$ DV

PS) a) Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}$, $(f, g) \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})^2$

Si $\lim_{t \rightarrow a} f(t)g(t) \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \rightarrow b} f(t)g(t) \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b f'g$ est de même nature que $\int_a^b fg'$

En cas de convergence on a $\int_a^b f(t)g'(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt$

b) $h: t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} \in \mathcal{C}([0; +\infty[)$

(car t est prolongé par continuité en 0)

► en 0: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1 \in \mathbb{R}$ donc $\int_0^{+\infty} h$ est faussement impropre en 0.

► en $+\infty$: On pose $f: t \mapsto \frac{1}{t} \in \mathcal{C}^1\left(\left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right]\right)$ et $g: t \mapsto -\cos(t) \in \mathcal{C}^1\left(\left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right]\right)$

multi x dérivée

on a $\left(\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(t)g(t) = 0 \in \mathbb{R} \right)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)g(t) = 0 \in \mathbb{R}$

donc $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(t)g'(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} h(t) dt$ est de même nature que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$

de plus, $\forall t \in [\frac{1}{2}, +\infty[$, $0 \leq \left| \frac{\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt < +\infty$ (2.3)

donc $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ CV

donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ CV

q6) Soit $x \in \mathbb{R}$.

on pose $f: t \mapsto t^{x-1} e^{-t} \in \mathcal{C}([0; +\infty[)$.

► en $+\infty$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 t^{x-3} e^{-t} = 0$ par croissance comparée, donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

de plus, $\forall t \in [\frac{1}{2}, +\infty[$, $\frac{1}{t^2} > 0$ et $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt < +\infty$ (2.3)

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale de f CV en $+\infty$ (*)

► en 0: $f(t) \sim_0 t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$

de plus, $\forall t \in]0; 1]$, $\frac{1}{t^{1-x}} > 0$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt < +\infty \iff 1-x < 1 \iff x > 0$

donc l'intégrale de f converge en 0 si et seulement si $x > 0$ (**)

Avec (*) et (**) on a bien $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ CV si et seulement si $x > 0$

On pose le changement de variable $v = t^2$ dans l'intégrale de Gauss.

$$dv = 2t dt$$

donc

t	0	$+\infty$
v	0	$+\infty$

et $t = \sqrt{v}$

Il faut préciser avant que les 2 intégrales ont la même nature des convergences puisque on reconnaît $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-v}}{2\sqrt{v}} 2t dv = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-v}}{2\sqrt{v}} dv = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} dv$

et on dit de même même (et on s'en rend compte)

donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$

q7) Soit $I \subset \mathbb{R}$.

f est intégrable sur I lorsque $\int_I |f(t)| dt < \infty$.

1) Fonctions définies par une intégrale

q1) a: $\triangleright \varphi$ est bien définie sur D si et seulement si $\forall x \in D, \int_I f(x,t) dt < \infty$
 $\triangleright D$ est l'ensemble de définition de φ si et seulement si $\forall x \in D, \int_I |f(x,t)| dt < \infty$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D, \int_I |f(x,t)| dt = \infty$

b: $\mathcal{G}_1$: - $\forall t \in I, x \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$

- Il existe une fonction ψ intégrable sur I telle que $\forall (t,x) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \psi(t)$

Alors $\varphi \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$

$\mathcal{G}_2$: - $\forall t \in I, x \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C}'(J, \mathbb{R})$

- $\forall x \in J, t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont intégrables sur I

- Il existe une fonction ψ intégrable sur I telle que $\forall (t,x) \in I \times J, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \psi(t)$

Alors $\varphi \in \mathcal{C}^2(J, \mathbb{R})$

c: La fonction qui majorer doit être indépendante de la variable de la variable qui définit l'autre fonction et ne doit donc dépendre que de la variable d'intégration. $x \mapsto x$.

- On peut se placer sur tout segment pour montrer des propriétés locales (continuité, classe $\mathcal{C}^k$...)

q2) $g: t \mapsto \frac{1}{\ln(t)} \in \mathcal{C}(]0,1[)$ $\frac{1}{2} \in]0,1[$

Par le théorème fondamental de l'intégration, $G \in \mathcal{C}^1(]0,1[)$ et $\forall x \in]0,1[, G'(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

On pose le changement de variable $\sqrt{u} = t$ dans $\mathcal{H}$.

alors

t	0	x^2
u	0	x^4

$$\text{donc } \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt = \int_0^x \frac{1}{\ln(\sqrt{u})} \frac{1}{2\sqrt{u}} du$$

$$t = u^2$$

$$\frac{1}{2\sqrt{u}} du = dt$$

Compliqué!
 ② Il suffit de voir $\mathcal{H}$ comme le résultat d'une composition et d'une somme:
 $\forall x \in]0,1[, \mathcal{H}(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt + \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)} dt$
 constante = $G(x^2)$

$x \mapsto x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$
 G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$
 et $\forall x \in]0,1[, x^2 \in]0,1[$
 donc $\mathcal{H} \in \mathcal{C}^1(]0,1[)$.

de plus, $h: u \mapsto \frac{1}{2\sqrt{u} \ln(u)} \in \mathcal{C}(]0,1[)$, donc par le théorème fondamental de l'intégration

$$\mathcal{H} \in \mathcal{C}^1(]0,1[) \text{ et } \forall x \in]0,1[, \mathcal{H}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x} \ln(x)}$$

$$\mathcal{H}'(x) = 2x \cdot G'(x^2) + 0$$

$$= \frac{2x}{2\ln(x^2)} = \frac{2x}{2\ln x} = \frac{x}{\ln x}$$

① On commence par préciser que $\int_0^{1/2} \frac{1}{\ln(t)} dt < \infty$

car $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)} \in \mathcal{B}(]0, \frac{1}{2}[)$ et majorée par une constante $C > 0$ ($\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(t)} = 0 \in \mathbb{R}$).

2) Suites définies par une intégrale

q1) g_i : - I est un segment

- $\forall m \in \mathbb{N}, x \mapsto f_m(x) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

- $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ CVU sur I

$$\text{Alors } \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_I f_m(x) dx = \int_I \lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) dx$$

g_i : - $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ CVS sur I (TCO)

- Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que $\forall (m, t) \in \mathbb{N} \times I, |f_m(t)| \leq \varphi(t)$

$$\text{Alors } \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_I f_m(x) dx = \int_I \lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) dx$$

q2) La fonction qui majore doit être indépendante de la variable discrète et ne doit donc dépendre que de la variable d'intégration. si t.

q3) Il faut pour $\forall (m, p) \in \mathbb{N}^2, J_{m,p} = \int_0^p f_m(t) dt$ et utiliser le théorème de convergence dominée

Ⓛ'ordre marche pas.

pour m , puis faire tendre p vers $+\infty$.

$$\text{On pose } \forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, g_m(t) = \begin{cases} f_m(t) & \text{si } t \in [0, m) \\ 0 & \text{si } t \in [m, +\infty[\end{cases}$$

ça marche

$$\text{alors } \forall m \in \mathbb{N}, I_m = \int_0^m f_m(t) dt + \int_m^{+\infty} 0 dt \\ = \int_0^{+\infty} g_m(t) dt$$

↑ l'intervalle ne dépend plus de m