

D'après CCINP PSI 2020 modélisation

Partie I - Origine de la puissance thermique produite

Q1. Si $V_{in} = 0$, on a alors $V_{GS} = V_{in} = 0 < V_{tn}$: le transistor est dans son état bloqué donc $I_{DS} = 0$.

Ainsi, on a bien $V_{out} = V_{DD} - RI_{DS} = V_{DD}$.

Q2. Le principe d'un inverseur logique est de fournir une tension de sortie à l'état bas (en général nulle) lorsque l'entrée est à l'état haut (non nulle) et inversement. Et un circuit logique est d'autant meilleur que la transition d'un état à l'autre est plus nette et franche.

On remarque sur les courbes de la figure 7 que :

- pour $R = 10 \text{ M}\Omega$, la transition est franche : dès que V_{in} est à peine supérieur à V_{tn} , $V_{out} \simeq 0$, et pour $V_{in} < V_{tn}$, $V_{out} \simeq 0$;
- pour $R = 1 \text{ M}\Omega$, la transition est plus floue, et même pour V_{in} nettement supérieur à V_{tn} , V_{out} reste positif ;
- pour $R = 0,1 \text{ M}\Omega$, la transition n'est pas satisfaisante : même pour V_{in} nettement supérieur à V_{tn} , V_{out} reste supérieur à 1 V.

Conclusion : ce circuit constitue un inverseur logique pour $R = 10 \text{ M}\Omega$.

Q3. Dans l'état bas, $V_{out} = 0$. Donc $V_{DD} = R I_{DS}$.

On a donc $p_c = I_{DS} V_{DD} = \frac{V_{DD}}{R} V_{DD} \approx \frac{V_{DD}^2}{R}$ Numériquement, $p_c = 2,5 \mu\text{W}$.

Cette puissance est faible pour un transistor mais si on suppose que le processeur comporte environ deux milliards de transistors, on obtient une puissance consommée de l'ordre de 5 kW, ce qui est très important.

Q4. Les lois des mailles donnent $V_{in} = V_{DD} + V_{GSP}$ et $V_{out} = V_{DD} + V_{DSP}$.

La solution qui était certainement attendue est la suivante :

- Si $V_{in} = 0$, le transistor de signal est un interrupteur ouvert. Et $V_{GSP} = 0 - V_{DD} = -V_{DD}$ donc le transistor de charge est un interrupteur fermé, donc $V_{DSP} = 0$, d'où $V_{out} = V_{DD} + 0 = V_{DD}$.
- Si $V_{in} = V_{DD}$, le transistor de signal est un interrupteur fermé. Donc $V_{out} = 0$.

On peut toutefois proposer une solution plus détaillée :

Puisque le montage est relié à un montage dont l'impédance d'entrée est très grande, $I_{DSP} = -I_{DSn}$.

Cas où $V_{in} = 0$

Alors, avec des notations évidentes, $V_{GSp} = -V_{DD} < V_{tp} < 0$, donc $I_{DSp} \leq 0$.

Et $V_{GSn} = 0 < V_{tn}$, donc $I_{DSn} = 0$.

Ainsi, $I_{DSp} = -I_{DSn} = 0$.

Sur la figure 5, on voit que si $I_{DSp} = 0$, alors $V_{DSP} = 0$. On en déduit $V_{out} = V_{DD} + V_{DSP} = V_{DD}$.

Cas où $V_{in} = V_{DD}$

Alors, avec des notations évidentes, $V_{GSp} = 0 > V_{tp}$, donc $I_{DSp} = 0$.

Et $V_{GSn} = V_{DD} > V_{tn} > 0$, donc $I_{DSn} \geq 0$.

Ainsi, $I_{DSn} = -I_{DSp} = 0$.

Sur la figure 4, on voit que si $I_{DSn} = 0$, alors $V_{DSn} = 0$. On en déduit $V_{out} = V_{DSn} = 0$.

Le système se comporte bien comme un inverseur logique.

Q5. Que ce soit dans l'état haut ou dans l'état bas, le courant qui traverse les canaux des transistors est nul. Ainsi, la puissance consommée pour maintenir un état donné est nulle.

Q6. En réalité, le courant traversant un transistor n'est pas tout fait nul quand celui-ci est bloqué. Cela peut expliquer la puissance consommée par le composant réel.

Q7. Les effets capacitifs s'expliquent par la structure du transistor : il y a un isolant entre deux conducteurs que sont le drain et la source.

En régime statique, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert, le courant traversant le condensateur est nul.

Q8. Lors du basculement de la sortie de l'état bas à l'état haut (de 0 à V_{DD} , sous l'action de $V_{in}(t)$, qui passe de V_{DD} à 0, comme le montre la figure 9), le transistor NMOS passe de l'état passant à l'état bloqué. Donc $I_{DSn} = 0$, et en notant i le courant dans le condensateur, orienté dans le sens descendant, $i = -I_{Dsp}$. La relation constitutive du condensateur est $i(t) = C_L \frac{dV_{out}}{dt}(t)$, d'où $-I_{Dsp}(t) = C_L \frac{dV_{out}}{dt}(t)$.

L'énergie que reçoit la porte lors de cette commutation est celle que lui fournit l'alimentation V_{DD} . Attention, la porte ne se limite pas au condensateur, c'est l'ensemble constitué (dans ce schéma équivalent) du condensateur et des deux transistors. En prenant $t = 0$ à un moment où V_{in} passe de V_{DD} à 0 :

$$\mathcal{E} = \int_0^\tau p_c dt = \int_0^\tau V_{DD} i(t) dt = \int_{V_{out}(0)}^{V_{out}(\tau)} V_{DD} C_L dV_{out}$$

On voit sur la figure 9 que $V_{out}(0) = 0$ et $V_{out}(\tau) = V_{DD}$. D'où :

$$\mathcal{E} = C_L V_{DD}^2. \text{ Et numériquement (je pense que la valeur de } V_{DD} \text{ est celle donnée en figure 7 ?), } \mathcal{E} = 5,0 \text{ pJ}.$$

Lors de la commutation inverse, le transistor PMOS passe de l'état passant à l'état bloqué donc, compte tenu de la figure 9, le courant fourni par la source de tension V_{DD} est $-I_{Dsp} = 0$ pendant cette commutation, donc la source V_{DD} ne fournit aucune énergie.

Q9. La puissance moyenne consommée par l'inverseur sur une période vaut alors :

$$\langle P \rangle = \frac{\mathcal{E}}{T} = \frac{C_L V_{DD}^2}{T}$$

Q10. Lorsque $V_m = 0,1V_{DD}$, la formule de l'énoncé donne l'expression suivante de τ : $\tau = \frac{C_L}{\kappa V_{DD}} \frac{\ln(17)}{0,9}$

$$\text{Numériquement, } \tau = \frac{2 \times 10^{-13} \ln(17)}{10^{-5} \times 5 \times 0,9} = 12 \text{ ns.}$$

Cette durée, très courte, correspond au temps de basculement de la porte logique (temps de latence pendant lequel la sortie n'est pas dans un état déterminé).

Q11. On reprend l'expression de la Q9, en remplaçant T par 2τ : $\langle P \rangle = \frac{2 \times 10^{-13} \times 5^2}{2 \times 12 \cdot 10^{-9}} = 0,20 \text{ mW}$.

Cette puissance est faible mais, multipliée par le nombre de transistors, cela devient une puissance très importante.

Remarque : on trouve plus qu'à la question Q3, ce qui est surprenant.

Q12. On a fait les calculs précédents en supposant que $V_{tn} = 0,1 V_{DD}$. Un changement du rapport aurait une influence sur la formule donnant τ

Supposons que le rapport $\frac{V_{tn}}{V_{DD}}$ soit fixe.

La diminution de la finesse de gravure permet de diminuer la capacité parasite C_L donc, si on ne diminue pas V_{DD} dans les mêmes proportions (ce qui semble vrai a priori), la formule donnant τ montre que la durée de commutation diminue.

On peut donc diminuer la période T de l'horloge. Les processeurs peuvent donc calculer plus vite.

En ce qui concerne la puissance consommée, les formules de Q10 et Q11 donnent

$$\langle P \rangle = \frac{C_L V_{DD}^2}{2 C_L \ln(17)} \times 0,9 \times \kappa V_{DD} = \frac{0,9 \kappa V_{DD}^3}{2 \ln(17)}, \text{ d'où l'intérêt de diminuer } V_{DD}.$$

En plus, diminuer la taille des portes logiques permet de mettre plus de transistors sur une même surface, ce qui augmente le nombre d'opérations réalisables par le processeur.

La performance des processeurs augmente donc.

Q13. Attention, la question porte ici sur le régime statique, donc ne prend pas en compte les commutations. Ce qui me vient à l'esprit comme idée est que si le canal est plus étroit, la résistance électrique du canal augmente, ce qui pourrait expliquer l'augmentation de la puissance consommée en régime statique (dans un état passant, un MOSFET équivaut à une source de courant, cf figures 4 et 5).

Q14. En l'absence de système refroidissement, le microprocesseur ne peut pas évacuer la puissance qu'il devrait dissiper pour fonctionner correctement : le microprocesseur reçoit donc une puissance égale à son enveloppe thermique.

En supposant l'évolution du système isobare, en appliquant le premier principe au processeur entre t et $t + dt$, on a :

$$dH = P_{th} dt, \text{ d'où } c_s \rho_s V d\theta = P_{th} dt. \text{ Et en intégrant sur une durée plus longue, il vient } \Delta t = \frac{c_s \rho_s V \Delta \theta}{P_{th}}.$$

$$\text{Numériquement, } \Delta t = \frac{700 \times 2,3 \cdot 10^{-3} \times 0,1 \times 50}{100} = 0,08 \text{ s.}$$

Conclusion : Ca fait court comme durée de vie ! Il faut refroidir, d'où le II qui vient.

Partie II - Modélisation du système de refroidissement

II.1. Rôle de la pâte thermique

Q15. L'épaisseur $e = 1 \mu\text{m}$ de la couche d'air est très faible devant les autres dimensions (longueur = largeur = 2 cm environ). On peut donc négliger les échanges thermiques sur les bords par rapport à ceux à travers les grandes surfaces. Il y a donc invariance de la température par translation selon les axes Ox et Oz et T ne dépend donc que de y .

Q16. La loi de Fourier s'écrit : $\vec{j}_{cd} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ où λ est la conductivité thermique, exprimée en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et \vec{j}_{cd} est le vecteur densité de courant thermique conductif.

On prend comme système une tranche d'air comprise entre y et $y + dy$. On lui applique le premier principe entre t et $t + dt$. Puisque le régime est stationnaire, l'énergie interne de cette tranche ne varie pas :

$$0 = j_{cd}(y) S_u dt - j_{cd}(y + dy) S_u dt. \text{ On en déduit } \frac{dj_{cd}}{dy}(y) = 0.$$

Et avec la loi de Fourier, puis en divisant par λ , $\frac{d^2 T}{dy^2} = 0$.

Q17. On primitive l'équation précédente en $T(y) = ay + b$ et, en utilisant les conditions aux limites $T(y = 0) = T_p$ et $T(y = e) = T_r$, on obtient : $T(y) = \frac{T_r - T_p}{e} y + T_p$.

Le flux thermique à travers une section S_u d'air, dirigé selon $+\vec{u}_y$ s'écrit : $\phi_{cd} = \iint_{S_u} \vec{j}_{cd} \cdot \vec{dS} = -\lambda_a \frac{dT}{dy} S_u = \phi_{cd p \rightarrow r}$.

D'où $\phi_{cd} = \lambda_a \frac{T_p - T_r}{e} S_u$. La résistance thermique est donc $R_a = \frac{T_p - T_r}{\phi_{cd p \rightarrow r}} = \frac{e}{\lambda_a S_u}$.

Q18. Le volume de la pâte thermique se conserve au cours de l'étalement. On remarque qu'une fois étalée, la pâte a la forme d'un cylindre de diamètre d et de section $S_c = \frac{\pi d^2}{4}$.

On a alors, en notant D le diamètre de la boule : $V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = e_p \frac{\pi d^2}{4}$.

$$\text{D'où } e_p = \frac{2 D^3}{3 d^2}$$

On nous donne D mais pour d , il faut faire une estimation à partir des photos. On ne connaît pas l'échelle sur ces photos, mais on sait que le processeur est un carré de surface $S = 4 \text{ cm}^2$. Si on appelle a l'arête du carré, $a = \sqrt{S}$. Sur la photo, je mesure une arête qui n'est pas la vraie, compte tenu du grandissement de la photo. Appelons a' l'arête du processeur sur la photo. Avec une règle, je mesure $a' \approx 4 \text{ cm}$.

Le diamètre du disque de pâte sur la photo de droite a pour valeur $d' \approx 3,5 \text{ cm}$.

On en déduit le vrai diamètre $d = \frac{d'}{a'} a = \frac{d'}{a'} \sqrt{S}$, ce qui donne $d = 1,7$ cm.

Finalement, $e_p = \frac{2 D^3 a'^2}{3 d'^2 S}$. Numériquement, $e_p = \frac{2 (3.10^{-3})^3 \times (4.10^{-2})^2}{3 (3,5.10^{-2})^2 \times 4.10^{-4}} = 6.10^{-5}$ m.

Q19. Pour le carré en trait noir, je mesure une arête que j'appellerai b' sur la photo, et qui vaut $b' \approx 2,3$ cm.

En tenant compte du grandissement de la photo, on a donc $S_u = \frac{b'^2}{a'^2} S$. $\sqrt{S_u} = 1,1$ cm

On en déduit $R_a = \frac{e a'^2}{\lambda_a S b'^2}$, donc $R_a = \frac{10^{-6} \times (4.10^{-2})^2}{0,03 \times 4.10^{-4} \times (2,3.10^{-2})^2} = 0,3$ K. W⁻¹.

Et $R_p = \frac{e_p a'^2}{\lambda_p S b'^2} = \frac{2 D^3 a'^4}{3 \lambda_p S^2 b'^2 d'^2}$, donc $R_p = \frac{2 \times (3.10^{-3})^3 \times (4.10^{-2})^4}{3 \times 10 \times (4.10^{-4})^2 \times (2,3.10^{-2})^2 \times (3,5.10^{-2})^2} = 0,04$ K. W⁻¹.

On trouve logiquement $R_a > R_p$ mais la pâte thermique ne diminue pas drastiquement la résistance thermique.

Q20. On utilise la relation analogue à la loi d'Ohm : $\Delta T = R_{th} P_{th}$.

On trouve ainsi sans pâte : $\Delta T_{sans} = 3.10^1$ °C, et avec pâte, $\Delta T_{avec} = 4$ °C.

Sans pâte thermique, le processeur est nettement plus chaud que le radiateur, lui-même nettement plus chaud que l'air ambiant.

Avec pâte, le processeur est presque à la même température que le radiateur.

Les valeurs de la question Q14 n'apportent pas grand-chose, car la température du radiateur ne sera pas la même, avec pâte et sans pâte.

Q21. On pourrait diminuer la résistance thermique en minimisant l'épaisseur de la couche d'air entre le processeur et le radiateur. Cela serait possible en utilisant un traitement de surface permettant de diminuer la taille des rugosités.

II.2 – Description d'un module de watercooling

Q22. $\lambda_{Cu} > \lambda_{Al}$ donc le cuivre est plus adapté pour réaliser un échangeur thermique puisqu'il évacuera mieux la chaleur. Par contre, le cuivre est plus cher. De plus, sa masse volumique est plus importante, ce qui peut être un inconvénient pour un ordinateur portable.

Q23. Etant en régime stationnaire, on peut appliquer le 1^{er} principe industriel dans l'eau comprise entre l'entrée et la sortie de l'échangeur :

$$D_m (\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p) = P_{th} + P_u$$

Or : il n'y a pas de pièce mécanique mobile dans l'échangeur donc $P_u = 0$

il n'y a pas de variation de la vitesse du fluide, ni de l'altitude entre l'entrée et la sortie de l'échangeur donc $\Delta e_c = 0$ et $\Delta e_p = 0$.

La variation d'enthalpie massique s'écrit : $\Delta h = c_e (T_s - T_e)$

Conclusion : $T_s - T_e = \frac{P_{th}}{D_m c_e}$, d'où $T_s = T_e + \frac{P_{th}}{D_m c_e}$

AN : avec $P_{th} = 100$ W et en estimant $T_e = 20$ °C, on obtient : $T_s = 22$ °C.

Remarque : vue la formulation de l'énoncé, on attendait visiblement ici la démonstration du premier principe industriel, puisqu'on nous demandait de bien choisir un système. Voici la rédaction dans ce cas.

Notations : avec astérisque : grandeurs relatives au système fermé

indices (e et s) pour les grandeurs intensives en entrée et sortie de l'échangeur

Définition du système fermé (Σ^*) :

- à t : eau contenue dans l'échangeur ($\Sigma_0(t)$) + la masse δm_e ($\delta \Sigma_1$) qui va entrer dans l'échangeur durant dt .
- à $t+dt$: eau contenue dans l'échangeur + la masse δm_s ($\delta \Sigma_2$) sortie de l'échangeur durant dt .

1^{er} principe pendant dt : $dU^* + dE_c^* + dE_p^* = \delta W + \delta Q$

Avec :

- $dU^* = dU_{\Sigma_0} + \delta m_s u_s - \delta m_e u_e$ or régime permanent, d'où : $dU_{\Sigma_0} = 0$ et $\delta m_e = \delta m_s = D_m dt$
- de même : $dE_c^* = D_m dt (e_{c_s} - e_{c_e}) = 0$ car $e_{c_s} = e_{c_e}$
- et : $dE_c^* = D_m dt (e_{p_s} - e_{p_e}) = 0$ car $e_{p_s} = e_{p_e}$
- $\delta W = \delta W_{transvas} + \delta W_u = P_e S_e v_e dt - P_s S_s v_s dt$ ($\delta W_u = 0$, pas de pièce mécanique mobile dans l'échangeur)
 $\delta W = (P_e \delta V_1 - P_s \delta V_2)$
- $\delta Q = P_{th} dt$

On obtient alors la relation suivante :

$$\left(\left(u_s + \frac{P_s \delta V_2}{\delta m} \right) - \left(u_e + \frac{P_s \delta V_1}{\delta m} \right) \right) D_m dt = P_{th} dt, \text{ soit } D_m (h_s - h_e) = P_{th}.$$

II.3 – Détermination du champ de température dans l'échangeur

Q24. En reprenant la démarche de l'énoncé, on écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \left(x + \frac{h}{2}, y \right) - \frac{\partial T}{\partial x} \left(x - \frac{h}{2}, y \right) \right) = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} (T(x+h, y) - T(x, y)) - \frac{1}{h} (T(x, y) - T(x-h, y)) \right)$$

$$\text{D'où : } \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{h^2} (T(x+h, y) - 2T(x, y) + T(x-h, y))}$$

$$\text{Et de même : } \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{h^2} (T(x, y+h) - 2T(x, y) + T(x, y-h))}$$

Remarque : on obtient des expressions un peu différentes si, pour calculer la dérivée de façon approchée, au lieu de se décaler de $-\frac{h}{2}$ et $+\frac{h}{2}$, on se décale simplement de h à droite, ou simplement de $-h$ à gauche.

Q25. D'après Q24, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x, y) = 0$ conduit à :

$$T(x-h, y) + T(x+h, y) + T(x, y-h) + T(x, y+h) - 4T(x, y) = 0,$$

$$\text{C'est-à-dire } T(i-1, j) + T(i+1, j) + T(i, j-1) + T(i, j+1) - 4T(i, j) = 0$$

$$\text{En identifiant avec l'expression de l'énoncé : } \boxed{a = b = c = d = 1 \text{ et } e = -4}$$

Q26. En écrivant les équations pour les 3 couples (i, j) demandés, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} T_{(0,1)} + T_{(2,1)} + T_{(1,0)} + T_{(1,2)} - 4T_{(1,1)} = 0 \\ T_{(0,2)} + T_{(2,2)} + T_{(1,1)} + T_{(1,3)} - 4T_{(1,2)} = 0 \\ T_{(0,3)} + T_{(2,3)} + T_{(1,2)} + T_{(1,4)} - 4T_{(1,3)} = 0 \end{cases}$$

Or d'après les conditions limites imposées, on a :

$$T_{(0,1)} = T_{(0,2)} = T_{(0,3)} = T_{(1,4)} = T_{(2,1)} = T_{(2,2)} = T_{(2,3)} = T_1 \quad \text{et} \quad T_{(1,0)} = T_2$$

Donc le système se réécrit sous la forme suivante :

$$\boxed{\begin{cases} 4.T_{(1,1)} - 1.T_{(1,2)} + 0.T_{(1,3)} = 2T_1 + T_2 \\ -1.T_{(1,1)} + 4.T_{(1,2)} - 1.T_{(1,3)} = 2T_1 \\ 0.T_{(1,1)} - 1.T_{(1,2)} + 4.T_{(1,3)} = 3T_1 \end{cases}}$$

Q27. En identifiant le système précédent avec la forme donnée dans l'énoncé, on obtient :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{B = \begin{pmatrix} 2T_1 + T_2 \\ 2T_1 \\ 3T_1 \end{pmatrix}}$$

Q28. Par lecture graphique, on lit directement qu'obtenir une erreur de 5% nécessite d'avoir $\boxed{h \simeq 6.10^2 \text{ nœuds}}$.

Q29. Tout d'abord, remarquons que $\|A\|$ aurait dû être clairement définie, et tant qu'à faire, avant la question Q29 ! La seule chose qui soit définie est $\|A\|_\infty$. Et encore, m et n ne le sont pas ; et je ne vois pas pourquoi il y a un symbole infini dans cette définition.

Bref, cette définition montre que $\|A\|$ est une grandeur positive (rassurant pour une norme), donc nécessairement $\text{cond}(A) \geq 0$. On peut déjà éliminer les valeurs proposées négatives.

Comme on veut une incertitude sur la température la plus faible possible ($\|\delta T\|$ faible) il est nécessaire d'avoir une matrice A de conditionnement « faible » également. Parmi les valeurs proposées, on choisirait : $\text{cond}(A) = 1$

Q30. Pour la matrice A , on obtient : $\|A\|_\infty = \max(17,45,140,234)$, d'où $\|A\|_\infty = 234$

Pour la matrice A^{-1} , on obtient : $\|A^{-1}\|_\infty = \max(99,91,68,16)$, d'où $\|A^{-1}\|_\infty = 99$

Q31. $\text{cond}(A) = 234 \times 99 = 23\,166$

la matrice est donc mal conditionnée.

Partie III – Guidage de l'ensemble arbre turbine par rapport au bâti

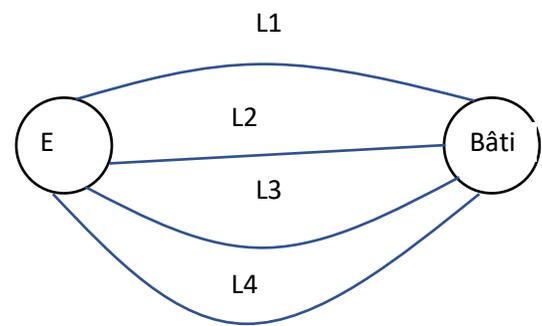
Q32 : Réaliser le graphe des liaisons du système ainsi modélisé.

L1 : liaison plane de normale \vec{z}

L2 : liaison sphère cylindre au point B, de direction \vec{z}

L3 : liaison sphérique de centre C

L4 : liaison sphère cylindre au point D, de direction \vec{z}



Q33 : Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle relatif au schéma cinématique de la figure 21

Le graphe des liaisons comporte 3 boucles indépendantes, le nombre cyclomatique vaut 3.

On peut donc écrire 18 équations issues des fermetures cinématiques.

Le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes relatives aux liaisons est : $n_c = 4+4+3+3 = 14$ (2 liaisons sphères cylindre, 1 liaison plane, 1 liaison sphérique)

Il y a 1 seule mobilité donc $m_c=1$ (rotation de l'ensemble autour de $B\vec{z}$)

On en déduit le degré d'hyperstatisme avec la relation : $h = m_c + E_c - n_c$

$h = 1+18-14 = 5$

Le système ainsi modélisé est hyperstatique de degré 5.

Q34 : En raisonnant uniquement sur les mouvements, déterminer la liaison globale entre l'ensemble E et le bâti.

La liaison sphérique en C empêche les 3 translations

La liaison plane empêche les rotations autour de $A\vec{x}$ et $A\vec{y}$.

Le seul mouvement possible entre l'ensemble E et le bâti est une rotation autour de $A\vec{z}$

La liaison est donc est liaison pivot d'axe $A\vec{z}$

Q35 : A partir des figures 22 et 24, déterminer alors le degré d'hyperstatisme de l'ensemble E1, E2 et bâti puis conclure par rapport à la question 2

Le graphe de liaisons devient :

L1 : liaison plane de normale \vec{z}

L2 : liaison sphère cylindre au point B, de direction \vec{z}

L3 : liaison sphérique de centre C

L4 : liaison sphère cylindre au point D, de direction \vec{z}

L5 : glissière

L6 : glissière

Le graphe des liaisons comporte 3 boucles indépendantes, le nombre cyclomatique vaut donc 3.

On peut donc écrire 18 équations issues des fermetures cinématiques

Le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes relatives aux liaisons est : $n_c = 4+4+3+3+1+1 = 16$ (2 liaisons sphère cylindre, 1 liaison plane, 1 liaison sphérique, 2 liaisons glissières)

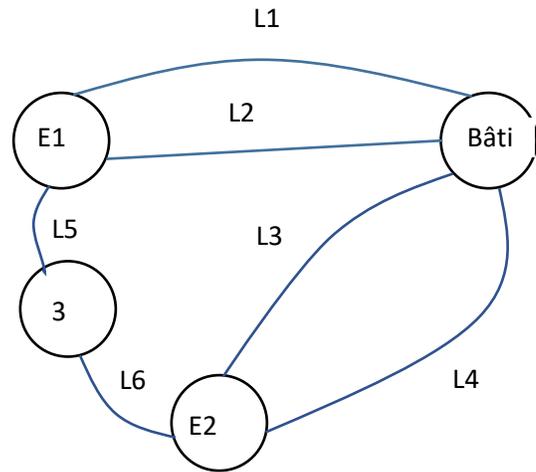
Il y a 1 seule mobilité donc $m_c=1$ (rotation de l'ensemble autour de $B\vec{z}$)

On en déduit le degré d'hyperstatisme avec la relation : $h = m_c + E_c - n_c$

$$h = 1+18-14 = 3$$

Le système ainsi modélisé est hyperstatique de degré 3

Le joint de Oldham a permis d'abaisser le degré d'hyperstatisme



Q36 : A partir de la figure 22, justifier par calcul que la liaison équivalente entre l'ensemble E1 et le bâti est bien une liaison pivot d'axe $A\vec{z}$

On a 2 liaisons en parallèle entre E2 et le bâti, on utilise une approche action mécanique et on somme les torseurs d'action mécanique.

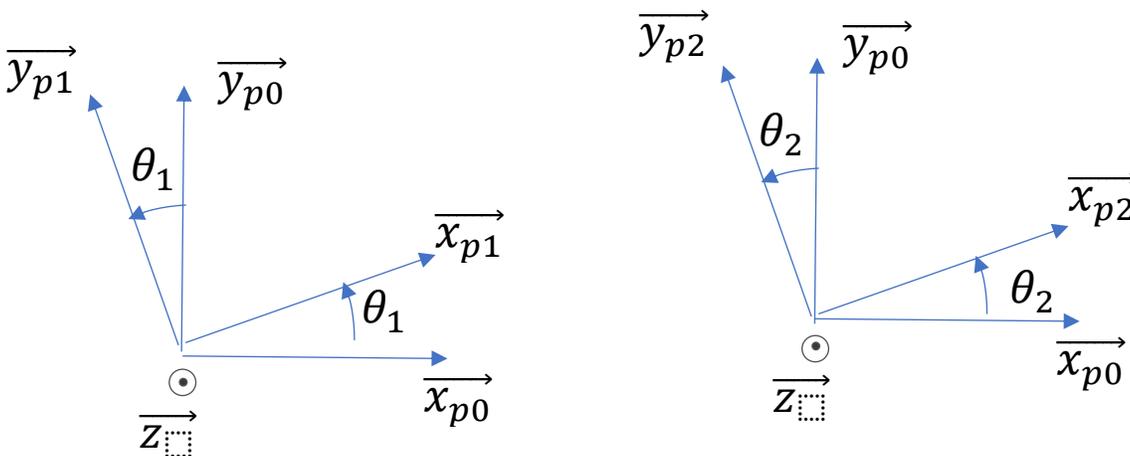
$$\{T_{E2 \rightarrow \text{bati}}^{L1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{E2B}^{L1} \\ 0 & M_{E2B}^{L1} \\ Z_{E2B}^{L1} & 0 \end{Bmatrix}_{P, \vec{x}\vec{y}\vec{z}} \quad (\text{liaison plane de normale } \vec{z}) \text{ vrai quelque soit le point P}$$

$$\{T_{E2 \rightarrow \text{bati}}^{L2}\} = \begin{Bmatrix} X_{E2B}^{L2} & 0 \\ Y_{E2B}^{L2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B, \vec{x}\vec{y}\vec{z}} \quad (\text{liaison sphère cylindre au point B, de direction } \vec{z})$$

$$\{T_{E2 \rightarrow \text{bati}}^{eq}\} = \{T_{E2 \rightarrow \text{bati}}^{L1}\} + \{T_{E2 \rightarrow \text{bati}}^{L2}\} = \begin{Bmatrix} X_{E2B}^{L2} & L_{E2B}^{L1} \\ Y_{E2B}^{L2} & M_{E2B}^{L1} \\ Z_{E2B}^{L1} & 0 \end{Bmatrix}_{B, \vec{x}\vec{y}\vec{z}}$$

On obtient le torseur d'action mécanique relatif à une liaison pivot d'axe $B\vec{z}$ ou $A\vec{z}$

Q37 Représenter la figure plane de calcul reliant la base $B_1(\vec{x}_{p1}, \vec{y}_{p1}, \vec{z}_p)$ à la base B_0 ainsi que celle reliant la base $B_2(\vec{x}_{p2}, \vec{y}_{p2}, \vec{z}_p)$ à la base B_0 .



Q38 Etant donnée l'orthogonalité entre \vec{y}_{p1} et \vec{x}_{p2} , montrer que $\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$

Les deux vecteurs sont orthogonaux, on a peut écrire : $\vec{y}_{p1} \cdot \vec{x}_{p2} = 0$

$$\vec{y}_{p1} = \cos \theta_1 \vec{y}_{p0} - \sin \theta_1 \vec{x}_{p0} \quad \vec{x}_{p2} = \cos \theta_2 \vec{x}_{p0} + \sin \theta_2 \vec{y}_{p0}$$

$$\text{soit } \vec{y}_{p1} \cdot \vec{x}_{p2} = -\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 = \sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

Q39 Justifier, à partir du résultat précédent, que l'accouplement en rotation par joint de Oldham soit qualifié de « homocinétique en rotation », c'est-à-dire que le rapport de transmission entre la vitesse de rotation de 1 par rapport à 0, ω_1 , et celle de 2 par rapport à 0, ω_2 , est constant dans le temps.

En partant de la relation obtenue précédemment :

$\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$ valable quels que soient les angles θ_1 et θ_2 , on peut écrire que :

$$\frac{d(\sin(\theta_2 - \theta_1))}{dt} = (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

Comme $\cos(\theta_2 - \theta_1) \neq 0$, on a nécessairement $\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = 0$ et donc $\omega_{1/0} = \omega_{2/0}$.

On a ainsi démontré que le joint de Oldham est homocinétique.