Problème n°1 : e3a PSI 2019 (extrait)

1. Pour la centrale de la Rance, la puissance surfacique est $P_{surf} = \frac{P_{tot}}{S_{tot}} = 11\ \mathrm{W.m^{-2}}$.

2. Selon le texte, oui, si les éoliennes sont suffisamment espacées (au moins d'une distance dite standard), la puissance d'un ensemble d'éoliennes est à peu près la somme des puissances des différentes éoliennes.

3. On note d le diamètre de turbine, la surface normale au flux de marée est la surface du disque donc $S_{disq} = \frac{\pi d^2}{4} = 95\ \mathrm{m^2}$.

La vitesse moyenne est égale au rapport du débit volumique sur la surface du disque : en notant v_0 cette vitesse moyenne, la donnée du débit moyen fournie au début de l'énoncé conduit à :

$v_0 = \frac{D_m}{S_{disq}} = 2{,}7\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

D'après le tableau (table G6), on en déduit que la puissance surfacique est comprise entre 60 et 200 $\mathrm{W.m^{-2}}$.

Or on a trouvé 11 W/m² à la question 1.

La formule de David MacKay ne convient donc pas pour le barrage de la Rance.

Notons que dans cette formule, la surface prise en compte pour la puissance par unité de surface est la surface au sol (sea-floor) de l'installation. Or, pour la Rance, on a pris la surface du bassin de retenue d'eau.

4. Équation locale de conservation de la masse : $div\ (\rho\ \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Si le fluide est incompressible, sa masse volumique est une constante (ne dépend ni de l'espace ni du temps) : $\rho = Cte$.

Il vient $div\ (\rho\ \vec{v}) = 0$, d'où $\rho\ div\ (\vec{v}) = 0$, ce qui conduit bien à $div\ (\vec{v}) = 0$.

Ainsi, le champ des vitesses est à flux conservatif. Donc dans un tube de courant le long de l'écoulement, le débit volumique est le même à travers chaque section. Et dans le cadre d'un écoulement parfait, le champ des vitesses est uniforme dans chaque section droite. Le débit volumique est donc $D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = vS$.

On a bien montré que Sv se conserve tout le long de l'écoulement. Et comme ρ est une constante, qui a même valeur en tout point, ρvS se conserve tout le long.

La quantité ρvS est le débit massique, noté $\dot{m}$ dans la suite.

5. En remplaçant le débit massique par son expression trouvée à la question précédente, on a bien $\dot{E_c} = \frac{1}{2}\rho S v^3$.

6. On écrit que la puissance cinétique vaut $\dot{E_{c1}} = \frac{1}{2}\rho S_1 v_1^3 = \frac{1}{2}\rho S_0 v_0 v_1^2$ à l'entrée,

et $\dot{E_{c2}} = \frac{1}{2}\rho S_2 v_2^3 = \frac{1}{2}\rho S_0 v_0 v_2^2$ à la sortie.

Ainsi, la variation de puissance cinétique, c'est-à-dire la différence entre celle de sortie et celle d'entrée est bien : $\Delta\dot{E_c} = \frac{1}{2}\rho S_0 v_0 (v_2^2 - v_1^2)$.

7. Comme dans le cours, on se ramène à un système fermé Σ^*, décomposé comme suit, en appelant Σ_0 le fluide se trouvant dans le volume de contrôle de la figure 10, $\delta\Sigma_1$ le fluide qui va y entrer entre t et $t + dt$, et $\delta\Sigma_2$ le fluide qui va en sortir entre t et $t + dt$: $\Sigma^*(t) = \Sigma_0(t) \cup \delta\Sigma_1$ puis $\Sigma^*(t + dt) = \Sigma_0(t + dt) \cup \delta\Sigma_2$.

$\overrightarrow{p^*}(t) = \overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t) + \rho v_0 S_0 dt\ \overrightarrow{v_1}$ puis $\overrightarrow{p^*}(t + dt) = \overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t + dt) + \rho v_0 S_0 dt\ \overrightarrow{v_2}$

Le théorème de la quantité de mouvement appliqué au système Σ^* dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, donne :

$$\frac{\overrightarrow{p^*}(t + dt) - \overrightarrow{p^*}(t)}{dt} = \vec{F}_{pression} + m^*\ \vec{g} + \vec{F}_{hel \to fluide}$$

Bien que l'énoncé ne l'ait pas rappelé, la pression est supposée uniforme tout autour du volume de contrôle, si on néglige la pesanteur. Et si on ne la néglige pas, la pression varie avec l'altitude, mais uniquement à cause de la pesanteur. Dans les deux cas, les termes $\vec{F}_{pression}$ et $m^*\ \vec{g}$ se compensent.

Il vient $\frac{\overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t+dt) + \rho v_0 S_0 dt\ \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t) - \rho v_0 S_0 dt\ \overrightarrow{v_1}}{dt} = \vec{F}_{hel \to fluide}$.

L'écoulement étant stationnaire, la répartition de masse et de vitesse dans le volume de contrôle est la même à t et à $t + dt$, donc $\overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t) = \overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t + dt)$.

D'où $\rho v_0 S_0\ (\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}) = \vec{F}_{hel \to fluide}$.

Enfin, la troisième loi de Newton (principe des actions réciproques) donne $\vec{F}_{hel \to fluide} = -\vec{F}_{fluide \to hélice}$.

On trouve donc bien $\vec{F} = \vec{F}_{fluide \to hélice} = \rho v_0 S_0\ (\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2})$.

Enfin, conformément à l'énoncé, $\mathcal{P}_{\text{hélice}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{v_0} = \rho v_0^2 S_0 (v_1 - v_2)$.

8. On fait un bilan d'énergie cinétique (ou de puissance cinétique) :
En prenant à nouveau le système fermé Σ^*, dans le référentiel terrestre,
$E_c^*(t) = E_{c\Sigma_0}(t) + \dot{E_{c1}} dt$. Et $E_c^*(t+dt) = E_{c\Sigma_0}(t+dt) + \dot{E_{c2}} dt$.
Puisque la répartition de masse et de vitesse reste toujours la même au cours du temps dans le volume de contrôle,
$E_{c\Sigma_0}(t) = E_{c\Sigma_0}(t+dt)$ et par suite, $E_c^*(t+dt) - E_c^*(t) = \left(\dot{E_{c2}} - \dot{E_{c1}}\right) dt$.
Et d'après le théorème de l'énergie cinétique, $E_c^*(t+dt) - E_c^*(t) = -\mathcal{P}_{\text{hélice}}$ dt,
D'où $\dot{E_{c2}} - \dot{E_{c1}} = \rho v_0^2 S_0 (v_2 - v_1)$ puis $\frac{1}{2}\rho S_0 v_0 (v_2^2 - v_1^2) = \rho v_0^2 S_0 (v_2 - v_1)$, qui se simplifie en l'équation donnée dans l'énoncé : $\frac{1}{2}(v_2 + v_1) = v_0$.

Il vient $\mathcal{P}_{\text{hélice}} = \frac{\rho S_0}{4}(v_1 - v_2)(v_1 + v_2)^2$.

9. On cherche une borne supérieure de la puissance reçue par l'hélice, pour une puissance incidente fixée, donc pour v_1 fixé. Cela se produit lorsque la dérivée par rapport à v_2 de $\mathcal{P}_{\text{hélice}}$ est nulle c'est-à-dire pour :
$-(v_1 + v_2)^2 + 2(v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = 0$, d'où $v_2 = \frac{v_1}{3}$.

On a alors $v_0 = \frac{v_1 + v_1/3}{2} = \frac{2}{3} v_1$.

La puissance, qui est alors max, vaut $\mathcal{P}_{\max} = \rho \frac{4}{9} v_1^2 S_0 \left(\frac{2}{3} v_1\right)$, ce qui donne bien $\mathcal{P}_{\max} = \frac{8}{27} \rho v_1^3 S_0$.

10. La puissance incidente est $\mathcal{P}_{\text{inc}} = \dot{E_{c1}} = \frac{1}{2}\rho S_1 v_1^3$.
Le rendement est le rapport de la puissance fournie à l'hélice sur la puissance incidente : $\mathcal{P}_{\text{hélice}} / . \mathcal{P}_{\text{inc}}$,
d'où $\eta_{max} = \frac{\frac{8}{27}\rho v_1^3 S_0}{\frac{1}{2}\rho S_1 v_1^3}$. Si, conformément à l'énoncé, on assimile S_0 à S_1, on trouve bien $\eta_{max} = \frac{16}{27}$. En fait, l'énoncé est maladroit : on n'assimile pas S_0 à S_1 mais on raisonne sur un fluide qui arriverait avec sa vraie vitesse v_1 et sur la surface du disque balayé par l'éolienne.

11. Les défauts responsables d'un rendement inférieur sont la viscosité de l'eau, les frottements sur l'axe de la turbine, l'encrassement de la veine d'écoulement par la faune ou la flore marine, etc.

Pb n°2 : d'après Centrale TSI 2021 et Mines PSI et e3a PSI 2016

1°) Diagramme potentiel-pH du fer

Q 1.

Espèce	Fe(s)	$Fe^{2+}(aq)$	$Fe^{3+}(aq)$	$Fe(OH)_2(s)$	$Fe(OH)_3(s)$
n.o. du fer	**0**	**+II**	**+III**	**+II**	**+III**

Q 2.

Domaine	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Espèce	$Fe^{3+}(aq)$	$Fe(OH)_3(s)$	$Fe^{2+}(aq)$	$Fe(OH)_2(s)$	Fe(s)

En effet, le nombre d'oxydation augmente avec le potentiel. Et quand une espèce capte des ions HO^-, elle passe de la forme acide à la forme basique, ce qui va avec une augmentation du pH.

Il s'agit d'un domaine d'existence pour les espèces solides (B, D, E),

et de prédominance pour les solutés (A et C).

Q 3. On écrit la ½ réaction rédox : $Fe^{3+}(aq) + e^- = Fe^{2+}(aq)$, et la relation de Nernst associée :

$E_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} = E^0{}_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} + 0{,}06 \log\left(\frac{[Fe^{3+}]}{[Fe^{2+}]}\right)$. Et sur la frontière, il y a égalité des concentrations des deux solutés, d'où $E_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} = E^0{}_{Fe^{3+}/Fe^{2+}}$.

Par lecture graphique, on en déduit : $E^0_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} = 0{,}77\ \text{V}$.

Q 4. La frontière entre C et D correspond à la limite d'apparition du précipité $Fe(OH)_2(s)$, donc $[Fe^{2+}] = c_{tra}$. Sur la frontière, on peut donc écrire la loi d'action des masses : $\frac{[Fe^{2+}]}{c_{ref}}\frac{[HO^-]^2}{c_{ref}^2} = K_{s2}$. Et comme cette frontière se trouve à pH = 9,5 on en déduit :
$K_{s2} = 1{,}0 \cdot 10^{-6} \times (10^{-14+9{,}5})^2 = 1{,}0 \cdot 10^{-15}$.

Q 5. On écrit la ½ réaction rédox : $Fe(OH)_3(s) + e^- + 3H^+(aq) = Fe^{2+}(aq) + 3H_2O$, et la relation de Nernst associée :

$E_{Fe(OH)_3/Fe^{2+}} = E^0{}_{Fe(OH)_3/Fe^{2+}} + 0{,}06 \log\left(\frac{[H^+]^3}{c_{ref}^2[Fe^{2+}]}\right)$, d'où la pente de $-0{,}18\ \text{V/unité pH}$.

Q 6. Le fer n'est pas thermodynamiquement stable dans l'eau puisque son domaine d'existence est entièrement en dehors de celui de l'eau.

Q 7. L'équation de la réaction d'oxydo-réduction modélisant la transformation chimique entre le fer et le dioxygène dissous dans l'eau, en milieu proche de la neutralité de pH est :

$$2Fe\ (s) + \frac{3}{2}O_2(g) + 3H_2O \rightarrow 2Fe(OH)_3(s)$$

2°) Cinétique dans un moteur thermique

Q8. $v = k[NO_2]^p[CO]^q$.

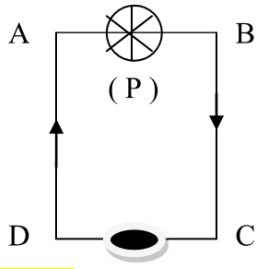
On voit, d'après les expériences 1 et 3, que la concentration en NO_2 est sans influence sur la vitesse de réaction, donc l'ordre partiel est 0 par rapport à NO_2.

On voit aussi que si on multiplie la concentration en CO par 4, la vitesse est multipliée par 16, donc l'ordre partiel est de 2 par rapport à CO.

Finalement, $v = k[CO]^2$, et numériquement, $k = \frac{0{,}5.10^{-2}}{0{,}01} = 0{,}5\ \text{L.mol}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

Problème n°3 : d'après G2E 2015, CCP PSI 2004

1°) Cœur artificiel



Q1 : Énergie mécanique volumique en A : $e_{mvA} = P_0 + P_A + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{4D_v}{\pi d_A^2}\right)^2 + \mu g z_A$,

puis en B : $e_{mvB} = P_0 + P_B + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{4D_v}{\pi d_B^2}\right)^2 + \mu g z_B$

Q2 : Puissance délivrée au sang par la pompe : par application du premier principe industriel, $\wp = D_v(e_{mvB} - e_{mvA})$. Puisque l'ensemble du système est dans un plan horizontal, $z_A = z_B$, d'où $\wp = D_v\left(P_B - P_A + \frac{8\mu D_v^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{d_B^4} - \frac{1}{d_A^4}\right)\right)$. Numériquement, $\wp = 0{,}76\ \text{W}$.

Q3 : Le nombre de Reynolds dans l'aorte est $Re_a = \frac{\mu U_a d_B}{\eta} = 1{,}1.10^3$.

Puisque c'est inférieur à 2000, l'écoulement dans l'aorte est laminaire.

Q4 : Loi de Hagen-Poiseuille, avec P_e à l'entrée et P_s à la sortie : $P_e - P_s = \frac{8\eta L}{\pi R^4} D_v$.

Elle est valide pour un écoulement stationnaire, homogène incompressible laminaire d'un fluide newtonien.

Q5 : La résistance hydraulique est le rapport d'une différence de pression sur le débit volumique de la canalisation soumise à cette différence de pression. Pour une conduite circulaire de longueur L_0 et de diamètre D_0, parcourue par un fluide incompressible, de viscosité η, $R_{hyd} = \frac{128\eta L_0}{\pi D_0^4}$.

Q6 : Soit P_e la pression à l'entrée de la première,P_s celle à la sortie de la seconde, et P_{12} la pression à l'endroit où elles sont raccordées. L'écoulement étant incompressible quand on utilise la notion de résistance hydraulique, on a nécessairement le même débit, D_v , tout le long de l'ensemble. On a, d'une part, $P_e - P_{12} = R_{hyd1} D_v$ et d'autre part, $P_{12} - P_s = R_{hyd2} D_v$.
En sommant les deux équations, il vient $P_e - P_s = (R_{hyd1} + R_{hyd2}) D_v$, ce qui montre bien que la résistance hydraulique globale d'un ensemble de deux conduites $((L_1, D_1)\ et\ (L_2, D_2))$ mises bout-à-bout est la somme des deux résistances hydrauliques.
On dit que les deux conduites sont « en série » car le débit volumique y est le même.

Q7 : Deux conduites sont « en parallèle » si elles sont soumises à la même différence de pression. Cette fois, le débit volumique total est la somme des deux débits. Or, $D_{v1} = \frac{P_e - P_s}{R_{hyd1}}$ et $D_{v2} = \frac{P_e - P_s}{R_{hyd2}}$, d'où $D_v = (P_e - P_s)\left(\frac{1}{R_{hyd1}} + \frac{1}{R_{hyd2}}\right)$, puis $\frac{1}{R_{hyd\,eq}} = \frac{1}{R_{hyd1}} + \frac{1}{R_{hyd2}}$.

Q8 : On utilise la loi, de Hagen-Poiseuille : $U_c \pi r^2 = \frac{\pi r^4}{8\eta L}(P_B - P_A)$, d' où $U_c = \frac{r^2}{8\eta L}(P_B - P_A) = 1{,}2\ \text{mm.s}^{-1}$.
Le nombre de Reynolds dans un capillaire est $Re_c = \frac{2\mu U_c r}{\eta} = 4{,}9.10^{-3}$. C'est très nettement inférieur à 2000, l'écoulement dans un capillaire est bien laminaire.

Q9 : De la question précédente, on déduit $N = \frac{D_v}{U_c \pi r^2} = 2{,}3.10^8$. C'est beaucoup, mais ils sont fins !

2°) Mesure de vitesse dans un canal

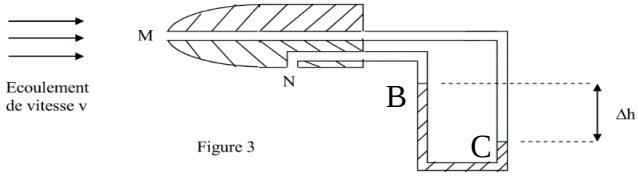


Figure 3

Q10 : La vitesse est nulle au point M (point d'arrêt). La relation de Bernoulli appliquée sur une ligne de courant horizontale, entre un point M' nettement en amont de M, et M, donne $P_{M'} + \frac{1}{2}\mu v^2 = P_M$. Et en prenant une autre ligne de courant partant d'un point M'' voisin de M', et passant tout près de N, $P_N \simeq P_{M'}$. D'où $v = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\mu}}$.

Q11 : La relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit $\overrightarrow{grad}\, P = \mu\, \vec{g}$.
Pour un fluide incompressible, elle s'intègre facilement en $P_B = P_N + \mu g(z_N - z_B)$,
et aussi $P_C = P_M + \mu g(z_M - z_C)$, et enfin, $P_C = P_B + \mu' g(z_B - z_C)$.
Comme on nous dit de considérer que $z_M \simeq z_N$, il vient $P_C - P_B = \Delta P + \mu g(z_B - z_C) = \mu' g(z_B - z_C)$,
et donc $\Delta P = (\mu' - \mu)\text{g}\Delta h$.

Q12 : En définitive, $v = \sqrt{\frac{2}{\mu}(\mu' - \mu)\text{g}\Delta h}$, d'où $v = \sqrt{2(d-1)\text{g}\Delta h}$.

3°) Décollage d'une fusée

Q13 :

Effectuons un bilan de quantité de mouvement : à t :

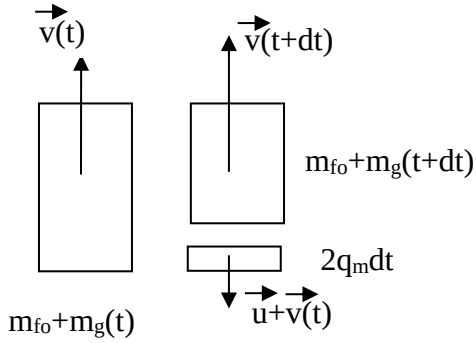
$$\vec{P}(t) = (m_{fo}+m_g(t))\vec{v}(t)$$

à t+dt : $\vec{P}(t+dt) = (m_{fo}+m_g(t) - 2q_m dt)\vec{v}(t+dt) + 2q_m dt(\vec{v}(t)+\vec{u})$

soit $\vec{P}(t+dt)=(m_{fo}+m_g(t))(\vec{v}+d\vec{v}) - 2q_m dt\vec{v} - 2q_m dt d\vec{v} + 2q_m dt(\vec{v}(t)+\vec{u})$

ou $\vec{P}(t+dt) = (m_{fo}+m_g(t))(\vec{v}+d\vec{v}) - 2q_m dt\, d\vec{v} + 2q_m dt\vec{u}$

L'avant-dernier terme est un infiniment petit d'ordre 2. Si on se limite à l'ordre 1 : $\vec{P}(t+dt) = (m_{fo}+m_g(t))(\vec{v}+d\vec{v}) + 2q_m dt\vec{u}$



Ainsi, $\frac{d\vec{P}}{dt} = (m_{fo}+m_g(t))\frac{d\vec{v}}{dt} + 2q_m\vec{u}$

La seule force qui s'applique sur le système est le poids ;

le théorème de la résultante dynamique pour S dans $R_{terrestre}$ donne :

$(m_{fo}+m_g(t))\frac{d\vec{v}}{dt} + 2q_m\vec{u} = (m_{fo}+m_g(t))\vec{g}$, soit $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{2q_m\vec{u}}{m_{fo}+m_g(t)}$.

Et $(m_{fo}+m_g(t))\frac{d\vec{v}}{dt} = (m_{fo}+m_g(t))\vec{g} - 2q_m\vec{u}$ définit la force de poussée : $\vec{F}_{poussée} = -2q_m\vec{u}$.

Q14 : On applique le théorème de la résultante dynamique à la fusée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen : pour que la fusée décolle, il faut que à t = 0 $||\mathbf{F}_{pousée}|| > (m_{fo}+m_{go})g$. Numériquement : 4,5 MN.

L'accélération à t = 0, est $\frac{d\vec{v}}{dt}(0) = \vec{g} - \frac{2q_m\vec{u}}{m_{fo}+m_{go}}$, soit en projetant sur l'axe vertical ascendant :

$$\frac{dv}{dt}(0) = -g + \frac{2q_m u}{m_{fo}+m_{go}} = -9{,}8 + \frac{2*1{,}8.10^3*2{,}1.10^3}{460.10^3} = 6{,}6\,\mathrm{m.s^{-2}}$$

Q15 : Sachant que $2q_m = -\frac{dm_g}{dt}$ en intégrant on trouve $m_g(t) = m_{go} - 2q_m.t$, donc en remplaçant dans l'équation précédente : $\frac{dv}{dt} = -g + \frac{2q_m u}{(m_{fo}+m_{go}-2q_m t)}$ en intégrant $v(t) = -gt - u.ln\left(\frac{m_{fo}+m_{go}-2q_m t}{m_{fo}+m_{go}}\right)$ et

$v(10s) = 73\ \mathrm{m.s^{-1}} = 2{,}6.10^2\ \mathrm{km.h^{-1}}$