Problème n°1 : ELECTROLYSE DU SULFATE DE COBALT

Des données sont fournies à la fin de ce problème

Le procédé industriel le plus couramment utilisé pour obtenir le sulfate de cobalt est le ***grillage sulfatant*** *de sulfures tels la cobaltpentlandite Co_9S_8 ; ces minerais renferment l'élément cobalt, mais aussi les éléments cuivre et fer. Après élimination des autres éléments, le cobalt est obtenu par électrolyse.*

La solution à électrolyser renferme de l'acide sulfurique (considéré comme un diacide fort), du sulfate de cobalt et du sulfate de cuivre (qui seront supposés entièrement dissociés).

Avant de réaliser l'électrolyse proprement dite, le cuivre est éliminé par ***cémentation*** *du cuivre par le fer (opération durant laquelle la solution est chauffée au contact de la poudre de fer sous agitation et contrôle du pH).*

L'électrolyse *est réalisée dans une cuve en ciment revêtue de PVC, en maintenant une température constante entre une anode (A) en graphite et une cathode (C) en aluminium. Le pH de l'électrolyte est stabilisé à une* ***valeur de 3,0****. Une circulation de l'électrolyte est assurée dans la cuve.*

La solution initiale à électrolyser ne renferme plus d'ions Fe^{2+} et a été obtenue en dissolvant 50 grammes de $CoSO_4,7H_2O$ par litre de solution, entièrement dissocié (solution limpide).

1. Faire un schéma de principe de cette électrolyse, en indiquant bien l'anode, la cathode, le sens de la tension imposée par la source électrique, le sens effectif du courant.

2. Quelles sont les demi-réactions chimiques pouvant apparaître à l'anode ? à la cathode ? on précise que les ions sulfate sont spectateurs, que le graphite et l'aluminium restent inertes.
Préciser pour chacune d'elles, la valeur théorique des potentiels d'électrodes (du point de vue thermodynamique).

3. Quelles sont les 1/2 réactions les plus favorisées thermodynamiquement à l'anode et à la cathode ? Du strict point de vue thermodynamique, quelle tension minimum faut-il appliquer pour obtenir une électrolyse ?

Pour récupérer du cobalt métal, il convient de considérer les aspects cinétiques.

4. Représenter schématiquement, en tenant compte des surtensions au démarrage, l'allure des courbes intensité-potentiel correspondantes (il est précisé que le couple H_3O^+/H_2 est très lent sur l'aluminium et que donc le tracé correspondant possède une pente beaucoup plus faible que celle des autres couples).

5. Ecrire l'équation-bilan de la réaction d'électrolyse permettant de récupérer du cobalt.

La chute ohmique relative aux électrodes et à l'électrolyte s'élève à 1,1 V.

6. Déterminer la tension minimale de fonctionnement de la cuve d'électrolyse.

L'électrolyse est réalisée sous une tension de 3,5 V avec une intensité de 10 kA, et une densité de courant j de 400 $A.m^{-2}$.

7. Calculer la masse théorique de cobalt métal obtenue à l'issue d'un jour d'électrolyse ?

La masse de cobalt réellement obtenue journellement s'élève seulement à 256 kg.

8. Définir puis calculer le rendement faradique. Expliquer, en vous appuyant sur les courbes intensité-potentiel précédemment tracées, pourquoi ce rendement ne peut atteindre 100% .

9. Déterminer la consommation massique d'énergie, exprimée en $kJ.kg^{-1}$ (énergie nécessaire pour déposer un kilogramme de cobalt).

DONNEES NUMERIQUES

Masses molaires atomiques (en $g.mol^{-1}$) : H : 1,0 ; O : 16,0 ; S : 32,1 ; Co : 58,9 ; Al : 27

Potentiels standard d'oxydoréduction à 298 K classés par ordre croissant :

Couple	Co^{2+}/Co	$H_3O^+/H_{2(g)}$	$O_{2(g)}/H_2O$
E°(V)	- 0,29	0,00	1,23

$\frac{RT \ln 10}{F} = 0{,}060$ V (à 298 K) Constante de Faraday : F = 96 500 C.mol^{-1}.

Surpotentiels au démarrage sur les électrodes :

$\eta_c(H_2)$, sur Al : – 0,10 V $\eta_c(Co)$, sur Al : – 0,10 V $\eta_a(O_2)$, sur graphite : 0,70 V

Problème n°2 : gravitation Géophysique de la planète Terre

Un ensemble de valeurs numériques est disponible en fin d'énoncé.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

I Champ gravitationnel terrestre

I.A. Champ gravitationnel créé par la Terre

Q 1. Énoncer le théorème de Gauss appliqué à la gravitation en précisant les analogies entre forces électrostatiques et gravitationnelles. On notera $\vec{\mathcal{G}}$ le champ gravitationnel.

La Terre est assimilée à une boule homogène de rayon R_T, de centre C et de masse M_T uniformément répartie en volume. On repère un point M de l'espace dans le système de coordonnées sphériques d'origine C, associé à la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$. On appelle $z = r - R_T > 0$ l'altitude d'un point M situé à l'extérieur de la Terre et on associe à ce point un axe (Oz) (verticale du lieu) dont l'origine O est en $r = R_T$ et tel que $\vec{e}_z = \vec{e}_r$.

Q 2. Déterminer, en tout point de l'espace, la direction du champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}_T$ créé par la Terre.

Q 3. On note $\mathcal{G}_T$ l'intensité du champ gravitationnel. De quelles variables d'espace dépend réellement $\mathcal{G}_T$ en coordonnées sphériques ? Justifier.

Q 4. Déterminer l'expression du champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}_T$ créé par la Terre à une altitude $z > 0$.

I .B - Variation de l'intensité du champ gravitationnel avec l'altitude

Q 5. Montrer que l'intensité du champ gravitationnel selon la verticale s'écrit, pour $0 < z \ll R_T$:

$$\mathcal{G}_T(z) \approx \frac{GM_T}{R_T^2}\left(1 - 2\frac{z}{R_T}\right).$$

On se place dans l'hypothèse $0 < z \ll R_T$ jusqu'à la fin du I.B.

Q 6. Calculer l'altitude dont il faut s'élever pour observer une variation de 1,00% de $\mathcal{G}_T$.

Q 7. Donner l'expression du gradient de $\mathcal{G}_T$. Que représente-t-il physiquement ?

Q 8. Les géophysiciens utilisent comme unité de mesure du champ de pesanteur le gal avec 1 gal = 1,00 cm.s^{-2}. Évaluer la valeur du gradient exprimée en µgal.cm^{-1} et commenter.

II Applications de la gravimétrie

La gravimétrie est l'étude des variations du champ de pesanteur dans l'espace et dans le temps. Elle permet de déterminer la répartition des masses au sein de la Terre et d'avoir ainsi accès à sa structure. Par exemple, la gravimétrie est utilisée pour déterminer la forme de la Terre (géodésie), pour détecter des cavités (génie civil ou archéologie), pour suivre les stockages d'eau (hydrologie continentale).

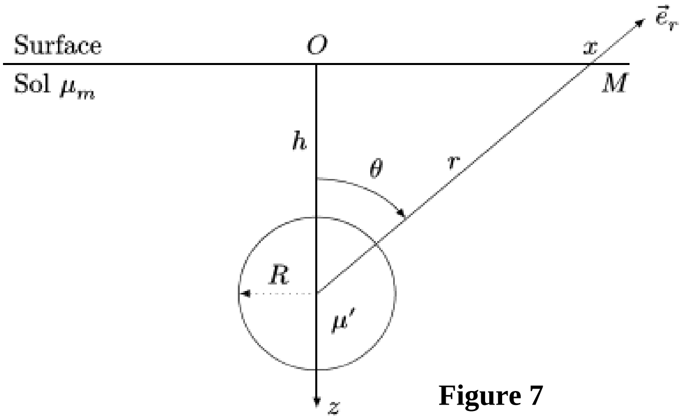

Figure 7

Dans cette partie, nous allons déterminer, par une analyse gravimétrique, les dimensions d'un corps sphérique enterré dans un sol de masse volumique moyenne μ_m (fgure 7).

Bien noter qu'à présent l'axe (Oz) est vertical **dirigé vers le sous-sol**.

Q 9. On note $\overrightarrow{g_B}$ le champ gravitationnel créé par une boule homogène de rayon R, de masse volumique $\mu' = \mu_m + \Delta\mu$. En utilisant le théorème de Gauss gravitationnel, déterminer l'expression du champ gravitationnel $\overrightarrow{g_B}$ en un point M situé à l'extérieur de la boule, en fonction de μ_m, $\Delta\mu$, G, R, r, distance de M au centre de la sphère, et du vecteur unitaire $\vec{e}_r$ (figure 7).

Q 10. Déterminer g_{Bz}, la composante verticale du champ gravitationnel créé uniquement par la boule au point M situé à une distance x de la verticale. Puis déterminer g_{Bz0}, la composante verticale du champ gravitationnel qui serait créé au point M, uniquement par une boule située au même endroit que la précédente, mais de masse volumique μ_m.

Q 11. Montrer que l'anomalie gravimétrique $\Delta g = g_z - g_0$, qui fait varier le champ gravitationnel apparent en un lieu, est identique au champ de pesanteur g'_z créé par une boule de masse volumique $\Delta\mu$.

Q 12. Montrer que l'anomalie gravimétrique s'écrit : $\Delta g = \dfrac{4\pi G \Delta\mu R^3 h}{3(x^2+h^2)^{3/2}}$.

Q 13. Tracer l'allure de la courbe Δg en fonction de x pour des sphères identiques enterrées à deux profondeurs différentes h_1 et $h_2 > h_1$.

Q 14. Quel est le lien entre la profondeur h et la largeur à mi-hauteur de la courbe ? Que vaut l'anomalie gravimétrique maximale ?

Q 15. Déterminer, à l'aide la courbe de la figure 8, la profondeur h et le rayon R de la sphère enterrée.

Q 16. Comment rendre indétectable par analyse gravimétrique de l'or stocké dans une grotte sphérique ?

Q 17. La grotte de 1 m de rayon est à 4 m de profondeur. Quelle masse d'or est-il possible de cacher par cette méthode ? Pour information, la masse volumique de l'or est ρ_{or} = 19 300 kg·m^{-3}.

Q 18. Une étude archéologique préalable prévoit la disposition de deux grottes sphériques de même dimension, situées sous une couche de calcaire uniforme (figure 9).

Tracer l'allure de la courbe de l'anomalie gravimétrique attendue $\Delta g = f(x)$ en vous aidant de la figure 10.

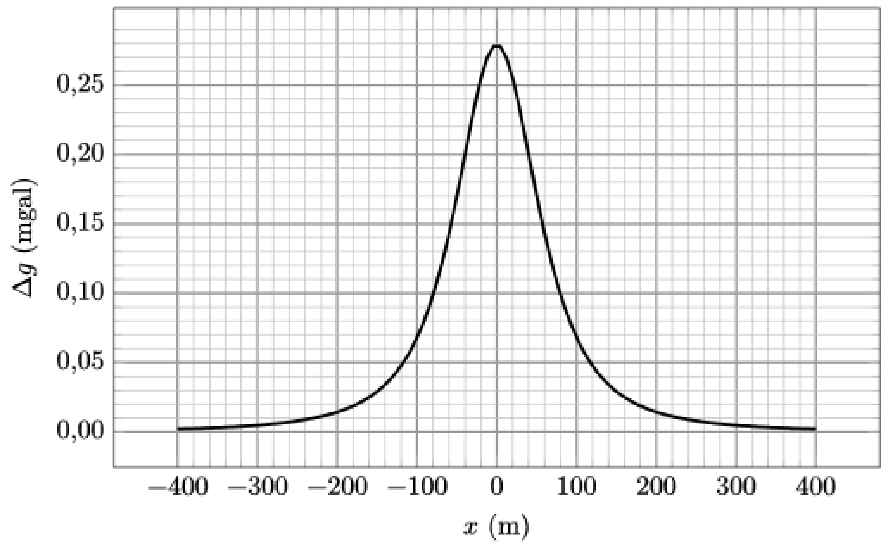

Figure 8 Anomalie gravimétrique Δg pour une sphère enterrée avec $\Delta\mu$ = 1000 kg.m^{-3}

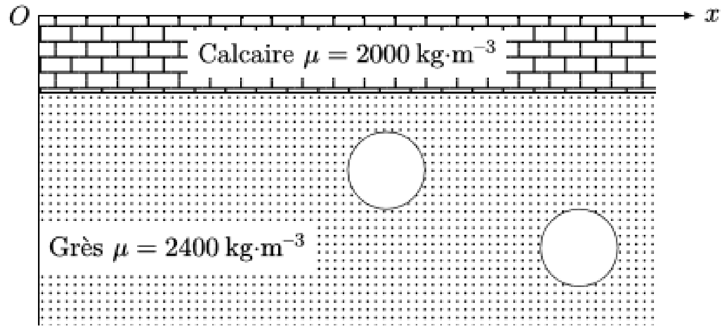

Figure 9

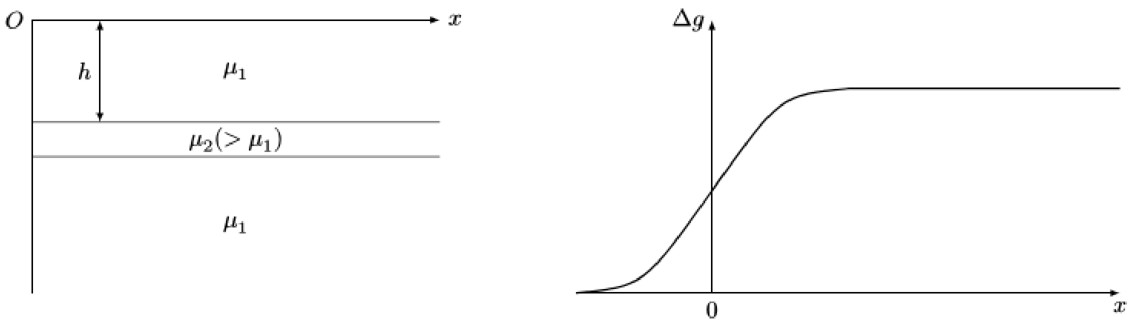

Figure 10 Anomalie gravimétrique pour une plaque horizontale semi-infinie

Données numériques

Constante de gravitation universelle	G = 6,67×10^{-11} kg^{-1}.m^3.s^{-2}
Rayon de la Terre	R_T = 6,37×10^3 km
Masse de la Terre	M_T = 5,97×10^{24} kg
Unité de mesure de la pesanteur	1gal = 1,00 cm.s^{-2}
Ordre de grandeur de la sensibilité des gravimètres actuels	Δg = 1µgal

Problème n°3 Quelques aspects de la physique du piano

Le piano est un instrument de musique à cordes frappées inventé par l'italien Bartolomeo Cristofori au milieu du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle et perfectionné principalement au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, le piano à queue moderne ayant atteint sa maturité au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Ce problème se propose d'aborder différents aspects du fonctionnement et de la conception de l'instrument. Les différentes parties sont largement indépendantes.

I Vibrations d'une corde de piano fixée à ses deux extrémités

Lorsque l'instrumentiste frappe une touche du clavier, celle-ci actionne un mécanisme, qui actionne à son tour un marteau[1], qui vient frapper une corde[2]. Celle-ci entre alors en vibration libre (tant que la touche est enfoncée). On s'intéresse donc dans cette partie aux vibrations libres d'une corde du piano.

Sauf avis contraire, on supposera que la corde peut être supposée sans raideur et on négligera toujours les effets de la pesanteur.

La corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0. Au repos, la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox). On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x,t)$ le déplacement du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t. L'axe (Oy) est l'axe vertical ascendant.

I.A – Mise en équation du mouvement transversal d'une corde de piano sans raideur

I.A.1) Que signifie l'expression « corde sans raideur » ? Qu'entend-on par « hypothèse des petits mouvements » ?

[1] Les marteaux sont réalisés en bois recouvert de feutre.
[2] Dans le médium et l'aigu, chaque marteau frappe simultanément deux ou trois cordes identiques pour chaque note.

I.A.2) Dans le cadre de l'approximation des petits mouvements, établir les deux équations liant les dérivées partielles par rapport à t et à x de la vitesse transversale d'un point de la corde $v_y(x,t) = \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ et de la projection sur l'axe (Oy) de la force de tension exercée à l'abscisse x par le morceau de corde situé à droite de cette abscisse sur la partie située à gauche $T_y(x,t)$. On fera apparaitre la tension T_0 en le justifiant.

I.A.3) Montrer que la fonction $y(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\mu \ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{I.1}$$

Identifier la célérité c des ondes transversales sur la corde et en donner l'expression. Comment s'appelle cette équation ? Citer au moins deux autres phénomènes régis par la même équation.

I.A.4) On peut lire dans une documentation technique que « une corde de piano est tendue à 85 kg ». Pouvez-vous en déduire un ordre de grandeur de la tension T_0 d'une corde ? Pour une corde en acier donnant la note « La 4 », le diamètre de la corde est de 1,1 mm. La masse volumique de l'acier valant $7{,}8 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, calculer la célérité c des ondes transversales sur la corde.

I.B – Modes propres d'une corde de piano sans raideur, fixée aux deux extrémités. Position du marteau sur la corde

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$, ce qui impose les conditions aux limites : $y(0,t) = y(L,t) = 0$.

I.B.1) Qu'appelle-t-on onde stationnaire ? Montrer que les solutions en ondes stationnaires, physiquement acceptables, de l'équation (I.1) sont de la forme $y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi)\ \cos(kx + \psi)$. Quelle est la relation entre ω et k ?

I.B.2) Qu'appelle-t-on « modes propres » et « fréquences propres » de la corde ? Exprimer les fréquences propres f_n de la corde en fonction de c et L. Donner l'expression de la solution $y_n(x,t)$ correspondant au mode propre numéro n. Dessiner l'aspect de la corde à plusieurs instants bien choisis pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

I.B.3) La solution générale de l'équation (I.1) correspondant aux conditions aux limites $y(0,t) = y(L,t) = 0$ est une superposition des modes propres, qui s'écrit

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n\frac{\pi c t}{L}\right) + b_n \sin\left(n\frac{\pi c t}{L}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

La corde est frappée à l'instant initial par un marteau de largeur $2a$ (faible), situé à l'abscisse x_0 (pendant un intervalle de temps supposé infiniment court). Ce marteau communique une vitesse initiale transversale à la corde. On se donne les conditions initiales suivantes (juste après l'attaque de la corde par le marteau) en tout point de la corde :

- la forme initiale de la corde donnée par $y(x,0) = 0$;
- la vitesse initiale de la corde donnée par

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \begin{cases} u_0 & \text{pour } x \in [x_0 - a,\, x_0 + a] \\ 0 & \text{en dehors de cet intervalle} \end{cases}$$

a) On donne le résultat du calcul :

$$y(x,t) = \frac{4u_0 a x_0}{cL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi a}{L}\right)}{n\frac{\pi a}{L}} \frac{\sin\left(n\frac{\pi x_0}{L}\right)}{n\frac{\pi x_0}{L}} \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n\frac{\pi c t}{L}\right)$$

Quel est l'effet de la largeur a du marteau ? Pour une corde de piano de longueur $L = 65\,\mathrm{cm}$ (« Do 4 », fréquence fondamentale $f_1 = 262\,\mathrm{Hz}$), donner l'ordre de grandeur de la fréquence au-delà de laquelle cet effet est sensible. La largeur du marteau vaut $2a = 2\,\mathrm{cm}$. Commentaire ?

b) Comment choisir le point d'attaque si l'on veut supprimer l'harmonique de rang n ?

I.C – Conséquences sur la conception des cordes d'un piano

La hauteur du son produit par une corde est fixée par la fréquence f de son mode fondamental $n = 1$. Les 88 notes d'un piano moderne s'échelonnent du « La 0 » (fréquence fondamentale $f = 28\,\mathrm{Hz}$) au « Do 8 » (fréquence fondamentale $f = 4{,}2\,\mathrm{kHz}$).

I.C.1) Rappeler la relation liant la longueur L d'une corde à la fréquence de son fondamental f.

On rappelle que pour la fréquence fondamentale $f = 262\,\mathrm{Hz}$, on a une longueur de corde $L = 65\,\mathrm{cm}$. Quelles sont les valeurs extrêmes des longueurs de corde prévues dans l'extrême grave et dans l'extrême aigu ?

On suppose ici que c est de même valeur dans toutes les cordes.

I.C.2) Les longueurs calculées ci-dessus sont excessives dans le grave (problèmes d'encombrement et de fragilisation de la structure à cette échelle) : en pratique, la longueur d'un piano à queue de concert moderne n'excède pas 3 m (la longueur la plus courante étant autour de 2,75 m). La longueur des cordes obéit assez bien à la loi étudiée au I.C.1 pour les notes au-delà du « Do 4 ». Pour les notes plus graves, on utilise des cordes filées : il s'agit de cordes d'acier, autour desquelles on a enroulé un fil de cuivre. La longueur de corde variant peu dans ce domaine du clavier, expliquer l'intérêt de ce procédé. Pourrait-on envisager de jouer sur la tension T_0 des cordes ?

I.C.3) On donne la masse volumique du cuivre : $\rho(\mathrm{Cu}) = 9{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. En assimilant l'enroulement de cuivre à une couche homogène d'épaisseur 1 mm recouvrant le cœur d'acier de diamètre 1,6 mm, et pour la tension $T_0 = 850\,\mathrm{N}$, calculer la longueur de la corde du « La 0 » (note la plus grave du piano, de fréquence fondamentale $f = 28\,\mathrm{Hz}$).

I.D – Prise en compte de la raideur : dispersion et inharmonicité

En réalité, à cause de l'élasticité du matériau constituant une corde, il faut prendre en compte sa raideur. Cela est particulièrement vrai pour les cordes de grand diamètre[3]. Il nous faut donc raffiner le modèle adopté jusqu'à présent. On considère toujours que les mouvements de la corde sont transversaux, et contenus dans le plan vertical xOy. La théorie de l'élasticité montre que la tension $\vec{T}(x,t)$ n'est plus tangente à la corde et que pour permettre la courbure de la corde, il faut prendre en compte un couple de moment $\vec{\Gamma} = \pm\Gamma(x,t)\vec{u}_z$ dont l'expression est donnée par

$$\Gamma(x,t) = \frac{\pi r^4}{4} E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

où r désigne le rayon de la corde. E, appelé « module d'Young », traduit les propriétés d'élasticité du matériau constituant la corde et s'exprime en Pascal. On considère ici une corde en acier de masse volumique $\rho(\text{acier}) = 7{,}8 \times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et de module d'Young $E = 190\,\mathrm{GPa}$.

La portion de corde comprise entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ est donc soumise aux forces de tension et aux couples

$$\vec{T}_g(x,t) = -\left(T_x(x,t)\vec{u}_x + T_y(x,t)\vec{u}_y\right) \qquad -\Gamma(x,t)\vec{u}_z \qquad \text{en } x$$
$$\vec{T}_d(x+\mathrm{d}x,t) = T_x(x+\mathrm{d}x,t)\vec{u}_x + T_y(x+\mathrm{d}x,t)\vec{u}_y \qquad \Gamma(x+\mathrm{d}x,t)\vec{u}_z \qquad \text{en } x+\mathrm{d}x$$

I.D.1)

a) Vérifier l'homogénéité de la relation donnant $\Gamma(x,t)$.

b) En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la portion $\{x, x+\mathrm{d}x\}$, montrer que T_x ne dépend que du temps. On supposera que T_x est en réalité une constante notée T_0. Établir également une équation aux dérivées partielles liant $y(x,t)$ et $T_y(x,t)$.

c) En appliquant le théorème du moment cinétique barycentrique à la portion $\{x, x+\mathrm{d}x\}$, établir une nouvelle équation aux dérivées partielles liant $y(x,t)$, $T_y(x,t)$ et $\Gamma(x,t)$. À cette fin, on négligera en justifiant cette approximation le moment d'inertie de la portion $\{x, x+\mathrm{d}x\}$ par rapport à l'axe Gz.

d) En déduire l'équation aux dérivées partielles régissant les mouvements de la corde

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + E\frac{\pi r^4}{4}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

où μ désigne toujours la masse linéique de la corde.

I.D.2) On s'intéresse à l'influence de la raideur sur les fréquences propres de la corde. On se place donc dans un mode propre de vibration et on suppose $y(x,t) = y_0\cos(kx+\psi)\cos(\omega t)$.

a) Établir la relation de dispersion $\omega(k)$ d'un tel mode.

b) Montrer que les fréquences propres de la corde tendue entre ses extrémités fixées en $x = 0$ et $x = L$ s'écrivent

$$f_n = n\frac{c}{2L}\sqrt{1+Bn^2}$$

[3] C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on enrobes les cordes de grave avec du cuivre enroulé, plutôt que d'augmenter encore le diamètre du cœur d'acier.

où n est un entier naturel non nul, c la célérité des ondes sur la corde sans raideur et B une constante qu'on exprimera en fonction de E, T_0, r et L. Pouvez-vous en déduire un des avantages présentés par un piano à queue par rapport à un piano droit ?

c) Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de f_n en fonction de n pour une corde sans raideur et pour la même corde avec raideur. Commenter.

d) Calculer numériquement B (on prendra $L = 0{,}65\,\mathrm{m}$, $r = 0{,}55\,\mathrm{mm}$, $T_0 = 850\,\mathrm{N}$ et $E = 190\,\mathrm{GPa}$). En déduire l'expression approchée de l'inharmonicité de raideur i_n, définie par le rapport $i_n = (f_n - f_n^0)/f_n^0$ où f_n^0 désigne la fréquence propre du mode n pour une corde sans raideur.

e) À partir de quel rang n la fréquence propre f_n de la corde avec raideur est-elle plus élevée d'un demi-ton que celle de la corde idéale, f_n^0 ? Donnée : deux notes séparées d'un demi-ton ont des fréquences fondamentales qui sont dans un rapport $2^{1/12}$.