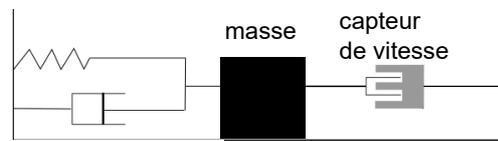


Les sismomètres

1 Principe de fonctionnement des sismomètres

Question 1



2 Capteur de vitesse

Question 2

$$\delta \vec{F}_{Lap} = i \vec{dl} \wedge \vec{B} \quad \text{avec } \vec{dl} \text{ dans le sens de la flèche de } i.$$

Question 3

$$\vec{F}_{Lap} = \int_0^l i dl \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_r \quad \text{donc} \quad \vec{F}_{Lap} = \int_0^l i dl \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_r = -i l B \vec{u}_z$$

Question 4 La puissance fournie au circuit par la f.é.m. $e(t)$ est $\mathcal{P}_e(t) = e(t) i(t)$.

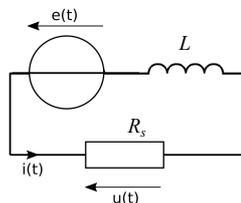
La puissance mécanique de la force de Laplace est $\mathcal{P}_{Lap}(t) = \vec{F}_{Lap}(t) \cdot \vec{v}_b(t) = -i(t) l B v_b(t)$.

Puisque ces deux puissances sont opposées, $e(t) = l B v_b(t)$.

Ce résultat peut être interprété de la façon suivante : la bobine reçoit une puissance mécanique $-\mathcal{P}_{Lap}(t)$, qu'elle convertit en puissance électrique $\mathcal{P}_e(t)$.

On peut faire une démonstration plus détaillée et calculatoire en prenant comme système une charge mobile δq_m et en calculant la puissance de la force de Lorentz magnétique reçue par cette charge. Puisque la force de Lorentz magnétique est toujours normale à la trajectoire, elle ne travaille pas, donc sa puissance est nulle.

Question 5



Question 6 D'après la loi de la maille, $u(t) = e(t) - L \frac{di(t)}{dt}$. Or $i(t) = \frac{u(t)}{R_s}$, donc $u(t) + \frac{L}{R_s} \frac{du(t)}{dt} = l B v_b(t)$.

Question 7 D'après le tableau 1 de l'énoncé, la fréquence de mouvement des sols a pour valeur maximale $f_{max} = 100 \text{ Hz}$.

En régime harmonique, l'équation différentielle précédente donne l'équation complexe suivante : $B l v_b = \underline{u} \left(1 + j\omega \frac{L}{R_s} \right)$.

Pour que la tension u peut être considérée comme proportionnelle à la vitesse v_b , il faut que $\frac{\omega L}{R_s} \ll 1$, soit $\frac{2\pi Lf}{R_s} \ll 1$, c'est-à-dire $R_s \gg 2\pi Lf$.

Afin que cette condition soit vérifiée pour toutes les fréquences, il faut qu'elle le soit pour la plus grande d'entre elles, donc que $R_s \gg 2\pi Lf_{max}$. Numériquement, $R_s \gg 63 \Omega$. Il faut prendre au moins 6 k Ω .

Question 8 Puisque la tension u peut être considérée proportionnelle à la vitesse de la bobine, on a :

$$\vec{F}_{Lap} = -i l B \vec{u}_z = -\frac{u}{R_s} l B \vec{u}_z = -\frac{v_b}{R_s} (lB)^2 \vec{u}_z. \text{ On a donc bien } \vec{F}_{Lap} = -\lambda_e \vec{v}_b, \text{ avec } \lambda_e = \frac{(lB)^2}{R_s}.$$

Cette expression est en accord avec la loi de modération de Lenz, car cette loi nous indique que la force générée par induction s'oppose à la cause qui lui donne naissance, ici le mouvement de la bobine, d'où le signe $-$ dans $\vec{F}_{Lap} = -\lambda_e \vec{v}_b$.

3 Modèle de connaissance d'un sismomètre vertical

Question 9

On isole la masse et on fait le bilan des actions mécaniques extérieures :

- Action de la pesanteur, force $-Mg\vec{u}_z$
- Action du ressort, force $F_r\vec{u}_z = k(z_v - z_0)\vec{u}_z$
- Action de l'amortisseur et action du capteur nulles car la masse est à l'équilibre

On applique le principe fondamental de la statique à la masse et on écrit le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{u}_z : $\boxed{-Mg + k(z_v - z_0) = 0}$

Question 10

L'accélération de la masse M (supposée ponctuelle) est donnée par la dérivé seconde du vecteur position \overrightarrow{OM} :

$$\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OA_s} + \overrightarrow{A_sA} + \overrightarrow{AM}) = Z_s(t)\vec{u}_z + \alpha\vec{u}_y + h - L(t)$$

L'accélération de la masse M est donc : $\boxed{\vec{\Gamma}_{masse/\mathcal{R}} = (\ddot{Z}_s(t)\vec{u}_z - \ddot{L}(t)\vec{u}_z)}$ que l'on peut aussi écrire

$$\boxed{\vec{\Gamma}_{masse/\mathcal{R}} = (\ddot{Z}_s(t) + \ddot{z}(t))\vec{u}_z}$$
 car $L(t) = h - z(t)$

Question 11

On isole la masse et on fait le bilan des actions mécaniques extérieures :

- Action de la pesanteur, force $-Mg\vec{u}_z$
- Action du ressort, force $F_r\vec{u}_z = (k(z_v - z(t))\vec{u}_z$
- Action de l'amortisseur, force $-F_a\vec{u}_z = -\lambda_m\dot{z}(t)$
- Action du capteur, force $-F_{Lap}\vec{u}_z = -\lambda_e\dot{z}(t)$

On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse dans son mouvement par rapport au repère galiléen et on écrit le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{u}_z :

$$M(\ddot{Z}_s(t) + \ddot{z}(t)) = -Mg + k(z_v - z(t)) - \lambda_m\dot{z}(t) - \lambda_e\dot{z}(t)$$

Avec $d_z(t) + z_0 = z(t)$ l'équation devient :

$$M(\ddot{Z}_s(t) + \ddot{d}_z(t)) = -Mg + k(z_v - d_z(t) - z_0) - (\lambda_m + \lambda_e)\dot{d}_z(t)$$

$$M\ddot{Z}_s(t) = -M\ddot{d}_z(t) - (\lambda_m + \lambda_e)\dot{d}_z(t) - kd_z(t) + k(z_v - z_0) - Mg$$

Avec les résultats de la question 9 : $-Mg + k(z_v - z_0) = 0$

On obtient : $M\ddot{Z}_s(t) = -M\ddot{d}_z(t) - (\lambda_m + \lambda_e)\dot{d}_z(t) - kd_z(t)$

Que l'on peut aussi écrire : $\boxed{M \frac{d^2 Z_s(t)}{dt^2} = -M \frac{d^2 d_z(t)}{dt^2} - (\lambda_m + \lambda_e) \frac{dd_z(t)}{dt} - kd_z(t)}$

Question 12

En supposant les conditions initiales nulles, l'équation de la question 11 donne dans le domaine symbolique de Laplace : $Mp^2 Z_s(p) = -Mp^2 D_z(p) - (\lambda_m + \lambda_e)pD_z(p) - kD_z(p)$

$$\frac{D_z(p)}{Z_s(p)} = \frac{-Mp^2}{Mp^2 + (\lambda_m + \lambda_e)p + k} \quad \frac{D_z(p)}{Z_s(p)} = \frac{\frac{-M}{k}p^2}{1 + \frac{\lambda_m + \lambda_e}{k}p + \frac{M}{k}p^2}$$

Par identification avec une fonction de transfert d'ordre 2, on a : $\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{\lambda_m + \lambda_e}{k}$ et $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{M}{k}$

On en déduit : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}}$ et $\xi = \frac{1}{2} \frac{\lambda_m + \lambda_e}{k} \sqrt{\frac{k}{M}}$ $\boxed{\xi = \frac{1}{2} \frac{\lambda_m + \lambda_e}{\sqrt{kM}}}$

Question 13

$$H(j\omega) = \frac{\frac{M}{k}\omega^2}{1 + j\frac{\lambda_m + \lambda_e}{k}\omega - \frac{M}{k}\omega^2} = \frac{\frac{M}{k}\omega^2}{1 - \frac{M}{k}\omega^2 + j\frac{\lambda_m + \lambda_e}{k}\omega} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\lambda_m + \lambda_e}{k}\omega}$$

Le gain vaut :

$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_m + \lambda_e}{k}\omega\right)^2}} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

L'argument vaut :

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = -\text{Arg}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Si $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ $|H(j\omega)| \approx \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ $\text{Arg}(H(j\omega)) \approx 0$

Si $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ $|H(j\omega)| \approx 1$ $\text{Arg}(H(j\omega)) \approx -\pi$

Si $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ $|H(j\omega)| \approx \frac{1}{2\xi}$ $\text{Arg}(H(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2}$

Question 14

On a : $d_z(t) = |H(j\omega)|Z_s \cos(\omega t + \arg(H(j\omega)))$

$$d_z(t) = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} Z_s \cos\left(\omega t - \text{Arg}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)$$

Question 15

Les résultats de la question 13 permettent de justifier les diagrammes asymptotiques de la figure 6 :

- pour les petites pulsations, la courbe de gain en décibel admet une asymptote de 40 dB/dec et la courbe de phase une asymptote de pente nulle.
- pour les grandes pulsations, la courbe de gain en décibel possède une asymptote de pente nulle et la courbe de phase une asymptote en $-\pi$
- tandis que pour $\omega = \omega_0$, la phase vaut $-\frac{\pi}{2}$ et le gain en décibel vaut $20\log\left(\frac{1}{2\xi}\right)$

Question 16

Pour que les amplitudes soient identiques, il faut que $20\log |H(j\omega)| = 0$.

Sur la courbe 6, nous voyons qu'il faut prendre ω_0 tel que $\omega_0 < \frac{\omega}{10}$

Il faut choisir de façon opportune la valeur de la masse M et de la raideur k du ressort afin que $10\sqrt{\frac{k}{M}} < \omega$ sur la plage de mesure du capteur.

Question 17

Pour avoir la réponse temporelle la plus rapide possible sans tolérer de dépassement, il faut avoir $\xi = 1$

Les fréquences à mesurer sont comprises dans la plage de fréquence de 0,1 à 100 Hz, et donc de pulsations comprises entre $0,628 \text{ rad.s}^{-1}$ et 628 rad.s^{-1} .

Donc $\omega_{0min} = 0,0628 \text{ rad.s}^{-1}$

Question 18

Si $\omega_0 = 0,1 \text{ rad/s}$, le sismomètre permet de mesurer, d'après la figure 6, à partir de 1 rad.s^{-1} soit $0,16 \text{ Hz} > 0,1 \text{ Hz}$ le critère « gamme de fréquence » n'est pas respecté.

LOCALISATION DU SÉISME

Question 19

Pour $i \in 1, 2, 3$, $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = r_i^2$

Question 20

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = r_1^2$$

$$x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 = r_2^2$$

et $2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) = r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$.

La droite d_{12} est donc d'équation : $y = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}x + \frac{r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}{2(y_2 - y_1)}$

soit $y = \frac{2-5}{10-5}x + \frac{25-16-4-25+25+100}{2 \times (10-5)} = -0,6x + 10,5$.

On voit en effet sur la figure 8b que la droite d_{12} passe bien par $x = 0$ pour $y = 10,5$ et passe par $y = 4,5$ pour $x = 10$.

Question 21 La droite d_{ij} est d'équation :

$$2(x_j - x_i)x + 2(y_j - y_i)y = r_i^2 - r_j^2 + x_j^2 - x_i^2 + y_j^2 - y_i^2$$

Ce qui nous donne sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \\ 2(x_3 - x_2) & 2(y_3 - y_2) \\ 2(x_1 - x_3) & 2(y_1 - y_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^2 - r_2^2 + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 \\ r_2^2 - r_3^2 + x_3^2 - x_2^2 + y_3^2 - y_2^2 \\ r_3^2 - r_1^2 + x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 \end{pmatrix}$$

donc $A = \begin{pmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \\ 2(x_3 - x_2) & 2(y_3 - y_2) \\ 2(x_1 - x_3) & 2(y_1 - y_3) \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix}$, et $R = \begin{pmatrix} r_1^2 - r_2^2 + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 \\ r_2^2 - r_3^2 + x_3^2 - x_2^2 + y_3^2 - y_2^2 \\ r_3^2 - r_1^2 + x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 \end{pmatrix}$

Question 22 La troisième ligne de la matrice A étant une combinaison linéaire des deux précédentes, la matrice est de rang 2.

On peut alors mettre le système sous la forme $A'X = R'$

avec $A' = \begin{pmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \\ 2(x_3 - x_2) & 2(y_3 - y_2) \end{pmatrix}$, et $R' = \begin{pmatrix} r_1^2 - r_2^2 + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 \\ r_2^2 - r_3^2 + x_3^2 - x_2^2 + y_3^2 - y_2^2 \end{pmatrix}$

Remarque : on pouvait retirer n'importe laquelle des 3 lignes de la matrice.

Question 23 Une norme étant par définition toujours positive, nous pouvons écarter les valeurs -10000, -1000 et -1.

Pour qu'une faible variation relative de R n'entraîne qu'une faible variation relative de X , la valeur la plus intéressante du conditionnement de A' est 1.

Question 24 $AX = R$ donc $A^+AX = A^+R$ puis $({}^tAA)^{-1}{}^tAAX = A^+R$, or $({}^tAA)^{-1}{}^tAA = I$ donc $X = A^+R$.

PROPAGATION D'UN TSUNAMI

Question 25 D'après les données numériques de l'énoncé, ζ_{max} est de l'ordre de quelques dixièmes de mètres, alors que la longueur d'onde λ_T est de l'ordre de 100 km. La pente de la vague est donc imperceptible.

De plus, la période temporelle est de l'ordre de 30 min. Là encore, cela n'est pas perceptible sans un enregistrement de type "timelapse".

Question 26 Puisque le déplacement vertical de l'eau est $\zeta(x, t)$, il est le même pour toute valeur de y , donc $v_y = 0$.

Et $\left[\text{les conditions aux limites sont invariantes par toute translation suivant } y \right]$ (profil du fond marin, profil de la surface libre au repos), donc pour tous les champs, en particulier celui des vitesses, $\frac{\partial}{\partial y} = 0$

Question 27 On voit sur la figure 11c que, Lorsque $\frac{h}{\lambda} \ll 1$, la trajectoire de chaque particule de fluide a une amplitude de mouvement $\left[\text{vertical bien plus petite que l'amplitude du mouvement horizontal, pour une même durée, correspondant à une période.} \right]$ On en déduit que $|v_z| \ll |v_x|$, et donc on a bien $\vec{v} \approx v_x \vec{u}_x$.

De plus, toujours sur la figure 11c, on voit que $\left[\text{les ellipses ont à peu près toutes la même longueur horizontale} \right]$ quel que soit z , donc $v_x(x, z, t) \approx v_x(x, t)$.

Question 28 On exploite l'équation (1) :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}(x, t) \vec{u}_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}(x, z, t) \vec{u}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}(x, z, t) \vec{u}_z - g \vec{u}_z$$

En projection sur x : $\left[\frac{\partial v_x}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}(x, z, t) \right]$.

En projection sur z : $\left[0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}(x, z, t) - g \right]$.

Question 29 On exploite la projection sur z : $\frac{\partial P}{\partial z}(x, z, t) = -\rho g$ donc, en primitivant par rapport à z , $\left[P(x, z, t) = -\rho g z + c(x, t) \right]$ avec $c(x, t)$ constante par rapport à z , mais fonction des deux autres variables.

Les conditions aux limites nous imposent que $\left[\forall x \text{ et } \forall t : P(x, z, t) = P_0 \text{ lorsque } z = h + \zeta(x, t) \right]$.

Donc, $c(x, t) = P_0 + \rho g(h + \zeta(x, t))$ et on retrouve bien la formule donnée dans l'énoncé : $P(x, z, t) = P_0 + \rho g(h + \zeta(x, t) - z)$

Question 30 D'une part, en utilisant les débits massiques en x et en $x + dx$,

$$\delta m_e = \rho v_x(x, t)(h + \zeta(x, t)) \cdot L_y \cdot dt - \rho v_x(x + dx, t)(h + \zeta(x + dx, t)) \cdot L_y \cdot dt,$$

c'est-à-dire

$$\left[\delta m_e = -\rho L_y dt \frac{\partial (v_x \times (h + \zeta))}{\partial x}(x, t) dx \right]$$

D'autre part, la masse entrant algébriquement correspond à la variation de la masse dans la tranche : $\delta m_e = \rho(h + \zeta(x, t + dt)) \cdot L_y \cdot dx - \rho(h + \zeta(x, t)) \cdot L_y \cdot dx$, soit :

$$\left[\delta m_e = \rho L_y \cdot dx \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) dt \right]$$

En égalisant les deux, puis en simplifiant, on obtient :

$$-\frac{\partial (v_x \times (h + \zeta))}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t), \text{ qu'on peut écrire plus simplement } -\frac{\partial (v_x \times (h + \zeta))}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

D'après la figure 11c, on peut supposer $\left[|\zeta| \ll h \right]$, même si on est en eau peu profonde (ne pas confondre $|\zeta| \ll h$ et $h \ll \lambda$).

Donc l'équation devient :

$$\left[-\frac{\partial (h v_x)}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right], \text{ c'est-à-dire : } -h \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \text{ On retombe bien sur la formule donnée dans l'énoncé.}$$

Question 31 On dérive par rapport à t l'équation précédemment obtenue : $\left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \right]$

Or d'après la projection sur x de la question 28 : $\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{\rho g}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right]$.

En supposant ζ au moins de classe C2, en utilisant $\left[\text{le théorème de Schwarz} \right]$, on peut écrire : $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = -\frac{\rho g}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$.

Puis en reportant dans l'équation du début de cette question, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = hg \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ en posant $c = \sqrt{hg}$, on obtient l'équation proposée.

C'est une $\left[\text{équation de d'Alembert} \right]$ à 1 dimension.

Question 32 La propagation de ces ondes n'est $\left[\text{pas dispersive} \right]$ puisque c (et donc ici h) ne varie pas en fonction de la

fréquence de l'onde.

Question 33 En regardant les figures 12 et 13, nous pouvons constater que l'amplitude augmente lorsque h diminue et donc au voisinage des côtes.

D'autre part, l'écart (en km) entre deux pics espacés du même intervalle de temps diminue, ce qui implique une diminution de la célérité des ondes.

Pour une valeur de h ne variant pas, on peut voir que le paquet d'ondes n'est pas déformé (pas d'étalement au cours du temps), la propagation n'est donc pas dispersive, ce qui est cohérent avec la réponse à la question 32

Question 34 $c(x, t) = \frac{dx}{dt}$ donc $dt = \frac{dx}{c(x,t)}$, puis $\Rightarrow \int_0^{\tau_p} dt = \int_0^d \frac{dx}{c(x,t)}$, et $\Rightarrow \tau_p = \int_0^d \frac{dx}{c(x,t)}$.

Question 35 `import numpy as np`

`g=10`

`def Tpropag(u) :`

`tau=0`

`for i in range(len(dist)) :`

`tau=tau+u[i][0]/np.sqrt(g*u[i][1])`

`tauprime=tau/3.6`

`return tauprime`

`print(Tpropag(dist))`

Question 36 On lit plutôt sur la figure 15 que le temps de propagation est d'environ 7,5 h.

Le résultat trouvé par `Tpropag` n'est donc pas acceptable, puisque l'écart dépasse 1 %.

Mais si on dispose de nombreuses bornes, on peut affiner en recoupant les informations.

Question 37 Oui, car avec les sismomètres, on localise l'épicentre, puis on peut prévoir les parcours des ondes par le calcul, et on compare cela avec les informations des bouées DART. On peut donc prévenir les populations.