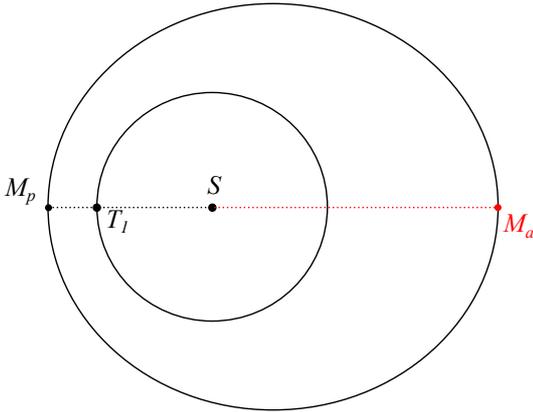


I La planète Mars

Q1. On considère que la trajectoire de la Terre autour du soleil est circulaire.

L'année martienne ($T_M = 687$ j d'après la question Q2) est plus longue en durée que l'année terrestre, donc l'orbite martienne est extérieure à l'orbite terrestre. On peut aussi s'appuyer sur le préambule de l'énoncé qui dit que Mars est la quatrième planète par ordre de distance au soleil croissante. Mais il faut à ce moment là savoir que la Terre est la troisième. On peut donc faire le dessin ci-dessous, sur lequel M_a est la périhélie de Mars et M_p l'aphélie, et sur lequel T_1 est la position de la Terre la plus proche de M_p , et aussi celle la plus éloignée de M_a :



La distance Terre-Mars minimale est $d_{\min} = T_1 M_p$.

La distance Terre-Mars maximale est $d_{\max} = T_1 M_a$.

Il vient :

$$M_p T_1 = c \Delta t_{\min}$$

$$T_1 M_a = c \Delta t_{\max}$$

On en déduit le demi-grand axe de l'orbite de Mars

$$a_M = \frac{M_p T_1 + T_1 M_a}{2} = c \frac{\Delta t_{\max} + \Delta t_{\min}}{2} = 2,43 \times 10^8 \text{ km}$$

Q2. On utilise la troisième loi de Kepler pour Mars et Terre :

$$\frac{a_M^3}{T_M^2} = \frac{a_T^3}{T_T^2} \quad \text{donc} \quad a_M = a_T \left(\frac{T_M}{T_T} \right)^{2/3} = 1,50 \cdot 10^8 \times \left(\frac{687}{365,25} \right)^{2/3} = 2,29 \times 10^8 \text{ km}$$

Cette seconde valeur de a_M est comparable à la valeur précédente, donc en accord avec les propos relatés dans l'article.

D'autre part, la troisième loi de Képler fait aussi le lien avec la masse du soleil. En prenant par exemple les caractéristiques du mouvement de la Terre :

$$\frac{a_T^3}{T_T^2} = \frac{\mathcal{G} M_S}{4\pi^2} \quad ; \quad M_s = \frac{4\pi^2 a_T^3}{\mathcal{G} T_T^2} = 2,00 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Q3. D'après la loi de la gravitation universelle, en assimilant la planète Mars à une boule homogène, le champ de gravitation en un point de sa surface est (la démonstration se fait avec le théorème de Gauss gravitationnel, en utilisant la symétrie sphérique de répartition de la masse) :

$$g_M = \frac{GM_M}{R_M^2} = \frac{G4\pi R_M^3 \rho_M}{3R_M^2} = \frac{4}{3}\pi G R_M \rho_M.$$

$$g_M = 3,69 \text{ m s}^{-2}.$$

II Tempête sur Mars

II.A - L'atmosphère martienne

Q4. Le pourcentage de dioxygène (21,01 % donné sur la figure 1) est comparable à la valeur usuelle à la surface terrestre. Cependant la pression totale $P = 4,75 \text{ PSI} = 0,327 \text{ bar}$ est trois fois plus faible qu'à la surface terrestre, donc la pression partielle de dioxygène est trois fois plus faible qu'à la surface terrestre : Mark Watney est en sous oxygénation (la valeur de la pression est de l'ordre de grandeur de la pression à environ 8 km d'altitude).

Q5. La loi du gaz parfait $PV = nRT$ donne $\rho = \frac{PM}{RT}$. La pression, de 0,11 psi est indiquée au début du paragraphe II.

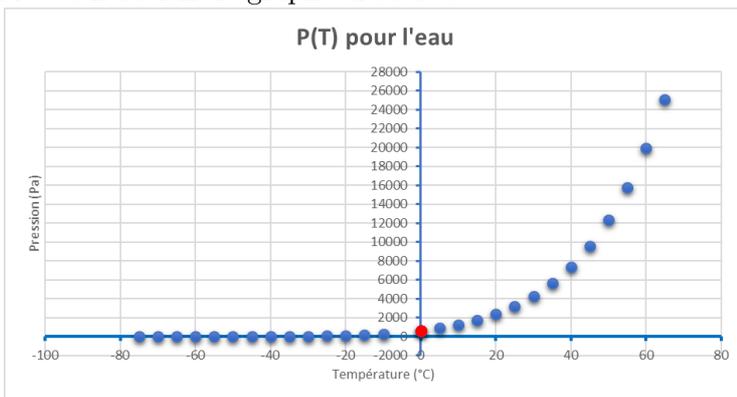
L'atmosphère martienne est constituée majoritairement de CO_2 (95%, $M_{\text{CO}_2} = 44 \text{ g mol}^{-1}$), donc puisqu'on nous demande une simple estimation de ρ , on peut écrire :

$$\rho = \frac{PM_{\text{CO}_2}}{RT_M} = \frac{0,11 \times 6890 \times 0,044}{8,314 \times (273 - 62)} \simeq 0,02 \text{ kg m}^{-3}$$

valeur environ 50 fois plus faible qu'à la surface terrestre.

Si on avait voulu obtenir une valeur plus précise, il aurait fallu calculer la masse molaire moyenne, en tenant compte de la composition (on voit dans les données page 7/8 qu'il y a 2,7% de N_2 et 95% de CO_2 , et d'autres choses en plu ...) : $M = 0,027 \times M_{\text{N}_2} + 0,95 \times M_{\text{CO}_2}$. Mais comme il manque quelques pourcents, on n'obtiendra pas un résultat plus précis.

Q6. On obtient le graphe ci-dessous.



Signification physique des deux points particuliers :

- point triple (en rouge) : point de coexistence, à l'équilibre, des trois phases (solide, liquide et gaz)
- point critique (tout au bout de la courbe, mais trop haut pour apparaître sur un dessin avec une échelle raisonnable) : point au-delà duquel il n'y a plus de distinction entre phase liquide et gaz ; on parle alors d'état fluide.

Q7. Sur Mars, la pression de 0,11 psi, convertie dans le système international est $P_M = 0,76 \text{ kPa} > 611 \text{ Pa}$, $T = -62^\circ\text{C} < 0,01^\circ\text{C}$. Comme la courbe d'équilibre liquide-solide, qui part du point triple (en rouge), est pratiquement verticale, l'eau à la surface de Mars est à l'état solide.

Q8.

- l'air qui se trouvait dans la combinaison va en sortir (puisque la pression est plus faible en dehors). Au bout d'un certain temps, le gaz dans le scaphandre sera le même qu'à l'extérieur : un pourcentage de dioxygène de 0,14 %, et une pression de 0,11 psi. Cela fait donc une pression partielle en dioxygène de $P_{\text{O}_2} = 1,4 \times 10^{-3} \times 0,76 \times 10^3 = 1,1 \text{ Pa}$ très faible : Mark Watney devrait s'asphyxier ;
- si la température dans la combinaison reste égale à $18,5^\circ\text{C}$, on voit sur la courbe tracée en Q6 (et dans le tableau de la page 8) que la pression de vapeur saturante est très faible, de l'ordre de $2 \times 10^3 \text{ Pa}$. Si la pression de l'atmosphère en contact avec le corps est de $0,76 \times 10^3 \text{ Pa}$, l'eau présente dans le corps se vaporise. Il apparaît des bulles dans les artères, qui empêchent la circulation du sang.

II.B - Une tempête martienne peut-elle faire basculer le VAM

Q9. On reprend la valeur de g_M obtenue en Q3, d'où

$$\left\| \vec{P} \right\| = m_{\text{VAM}} g_M = 36,9 \text{ kN}$$

Q10. La calcul du nombre de Reynolds donne avec $\rho = 0,019 \text{ kg m}^{-3}$ masse volumique de l'atmosphère martienne obtenu en Q5), $D = 10 \text{ m}$ diamètre du cylindre, $V_\infty = 120 \text{ km h}^{-1} = 33 \text{ m s}^{-1}$ la vitesse de l'écoulement en amont du cylindre, et $\eta = 1,07 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$ la viscosité du dioxyde de carbone composant l'atmosphère martienne

$$Re = \frac{\rho D V_\infty}{\eta} = 5,9 \times 10^5$$

On lit sur le diagramme figure 9 la valeur du coefficient de traînée $c_D = 0,3$, puis en utilisant la définition de ce coefficient $c_D = \frac{F_D / (DL)}{\rho V_\infty^2 / 2}$ donnée sur l'axe des ordonnées du même graphique :

$$F_D = c_D \frac{\rho V_\infty^2}{2} DL = 0,6 \text{ kN}$$

Le calcul du vent produisant la même force à la surface terrestre est difficile, car le coefficient de traînée dépend du nombre de Reynolds, lequel dépend de la vitesse qu'on cherche. Il faut donc procéder par tâtonnement.

On peut commencer par supposer que l'on se trouve sur le grand plateau de la courbe de la figure 9, et que $C_{DT} \simeq 1$.

À la surface de la Terre, pour des conditions usuelles ($P \approx 1 \text{ bar}$, $T \approx 300 \text{ K}$, avec $\mathcal{M} = 29 \text{ g mol}^{-1}$) la masse volumique vaut $\rho_T = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$.

La vitesse cherchée est alors $V_{\infty, T} = \sqrt{\frac{2F_D}{\rho_T D H C_{DT}}} \simeq 2 \text{ m s}^{-1}$;

Mais alors, le nombre de Reynolds vaut $Re_T = \frac{\rho_T D V_{\infty, T}}{\eta_T} = 1,5 \times 10^6$, donc on ne se trouve pas sur le plateau de la courbe de la figure 9. Il faut donc changer le coefficient de traînée, et prendre $C'_{DT} \simeq 0,5$.

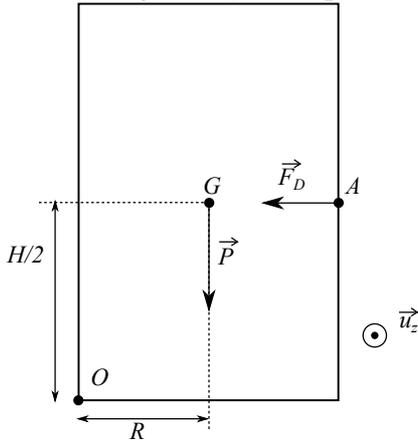
La vitesse cherchée est alors $V'_{\infty, T} = \sqrt{\frac{2F_D}{\rho_T D H C'_{DT}}} \simeq 3 \text{ m s}^{-1}$;

Mais alors, le nombre de Reynolds vaut $Re'_T = \frac{\rho_T D V'_{\infty, T}}{\eta_T} = 2 \times 10^6$, ce qui est cette fois assez cohérent.

Remarque : les valeurs données correspondent à un cas particulier puisque situé très près de la chute brutal du coefficient de traînée.

Cette question n'est pas indiquée comme question ouverte, mais les candidats sont très peu guidés : où s'arrêter dans les calculs ?

Q11. On se place dans une situation statique, avec sur la figure 2 de l'énoncé, $\alpha \rightarrow 0$ (limite du basculement). Pour faire simple, on peut supposer que les actions de traînée sont réparties uniformément sur la hauteur du cylindre, donc que leur résultante s'applique à mi-hauteur, au point A de la figure ci-dessous.



On appelle J le moment d'inertie du VAM par rapport à l'axe (Oz) .

On isole le VAM, dans le référentiel lié à Mars, supposé galiléen. Le théorème du moment cinétique en O donne :

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \vec{u}_z = \vec{OA} \wedge \vec{F}_D + \vec{OG} \wedge \vec{P}.$$

Puis en projetant selon \vec{u}_z :

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{H}{2} F_D - RP.$$

La limite de basculement correspond à $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \rightarrow 0^+$.

D'où

$$0 = -RP + F_D \frac{H}{2} = -RP + c_D \frac{\rho V^2}{4} DH^2 : V_\infty = \sqrt{\frac{2P}{\rho c_D H^2}} = 1,6 \times 10^2 \text{ m s}^{-1} = 5,6 \times 10^2 \text{ km h}^{-1}$$

Valeur très supérieure à la vitesse maximale mesurée, de 120 km h^{-1} : il n'y a pas de risque (si le véhicule est sur un sol horizontal).

III dimensionnement des panneaux solaires

Q12. Si, au cours d'un cycle, le fluide interne de la pompe à chaleur reçoit un travail W , reçoit de la source chaude un transfert thermique Q_C , de la source froide un transfert thermique Q_F , l'efficacité est définie par le rapport

$$e = \frac{-Q_C}{W}$$

On rappelle que pour une machine de type récepteur, $W > 0$, $Q_C < 0$, $Q_F > 0$.

En appliquant le premier principe au fluide interne pendant un cycle de la machine,

$$\Delta U = 0 = W + Q_C + Q_F.$$

En appliquant le second principe au fluide interne pendant un cycle de la machine,

$$\Delta S = 0 \geq \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F}.$$

En exploitant l'équation et l'inéquation, on obtient

$$e \leq \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

Donc ici :

$$e \leq \frac{T_i}{T_i - T_e}$$

On en déduit, avec $T_i = 20^\circ\text{C} = 293\text{K}$ et $T_e = -62^\circ\text{C} = 211\text{K}$

$$e \leq \frac{T_i}{T_i - T_e} = 3,6 = e_{\max}$$

Q13. On est ici dans un problème thermique 2D à symétrie cylindrique. On adopte les coordonnées cylindriques.

Les conditions aux limites de température (température uniforme sur la paroi externe, uniforme sur la paroi interne), permettent de dire qu'en régime stationnaire, la température ne dépend pas de θ .

Comme on néglige les effets de bord, la température ne dépend pas non plus de z . Elle ne dépend donc que de r , ce qui explique que l'énoncé indique que le flux thermique est uniquement radial. En d'autres termes, en notant \vec{j}_{cd} le vecteur densité de flux thermique conductif, $\vec{j}_{cd} = j_{cd}\vec{u}_r$.

Et puisqu'on est en régime stationnaire, sans terme de source, le flux thermique conductif est le même, de valeur ϕ_{cd} , à travers tout cylindre d'axe (Oz) , de hauteur L , de rayon r , avec $R - e \leq r \leq R$.

Ainsi, $2\pi r L j_{cd} = \phi_{cd} = \text{constante}$, le flux étant dirigé (par l'énoncé) vers l'extérieur.

Et en utilisant la loi de Fourier :

$$-2\pi r L \lambda \frac{dT}{dr} = \phi_{cd} =$$

d'où l'équation différentielle :

$$\frac{dr}{r} = -\frac{2\pi\lambda L}{\phi_{cd}} dT$$

qui s'intègre en

$$\ln\left(\frac{R}{R-e}\right) = -\frac{2\pi\lambda L}{\phi_{cd}}(T_e - T_i)$$

d'où

$$R_{th} = \frac{T_i - T_e}{\phi_{cd}} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{R}{R-e}\right) = 0,3\text{K W}^{-1}$$

Q14. D'après les notations de l'énoncé, \mathcal{P}_M est la puissance mécanique que reçoit le fluide interne de la pompe à chaleur.

En régime stationnaire, la pompe à chaleur doit compenser les pertes thermiques à travers les parois du module. Donc la puissance thermique reçue par le fluide interne de la part de la source chaude est $\mathcal{P}_C = -\phi_{cd}$.

En termes de puissance, l'efficacité de la pompe à chaleur est $e = \frac{-\mathcal{P}_C}{\mathcal{P}_M} = \frac{\phi_{cd}}{\mathcal{P}_M}$.

Notons η le rapport entre l'efficacité réelle e et l'efficacité maximale e_{\max} de Carnot. On a donc :

$$\frac{T_i - T_e}{R_{th}} = e\mathcal{P}_M = \eta e_{\max}\mathcal{P}_M$$

Puis

$$\mathcal{P}_M = \frac{T_i - T_e}{R_{th}\eta e_{\max}} = 0,2\text{kW}$$

Q15. Là, il y a un souci, car les panneaux solaires fournissent de l'énergie électrique, et la puissance \mathcal{P}_M que l'on a calculée est une puissance mécanique. Il faudrait donc prendre en compte le rendement du moteur électrique qui va entraîner la pompe à chaleur. Si on prend pour le moteur un rendement de 100%, on aura une sous-estimation de la surface de panneaux nécessaire. Notons η_{moteur} le rendement du moteur électrique.

En notant η_{panneau} le rendement de conversion des panneaux solaires

$$\mathcal{P}_M = \eta_{\text{moteur}} \eta_{\text{panneau}} P_s S$$

d'où

$$S = \frac{\mathcal{P}_M}{\eta_{\text{moteur}} \eta_{\text{panneau}} P_s} \geq \frac{\mathcal{P}_M}{\eta_{\text{panneau}} P_s} = 2 \text{ m}^2$$

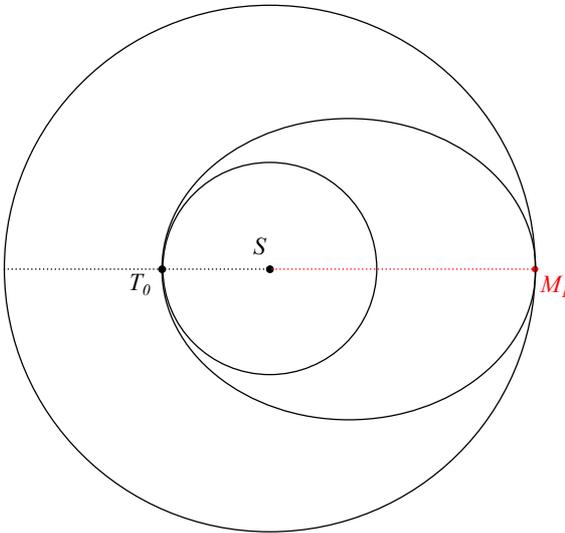
Cette valeur semble cohérente avec la photographie présentée.

IV Sauvetage de Mark Watney par le vaisseau Hermès

IV.A - Trajectoire du vaisseau Hermès

Q16. Le périhélie de l'orbite de transfert est situé sur l'orbite terrestre, et son aphélie est située sur l'orbite martienne, donc :

$$a = \frac{a_T + a_M}{2} = 189 \times 10^6 \text{ km}$$

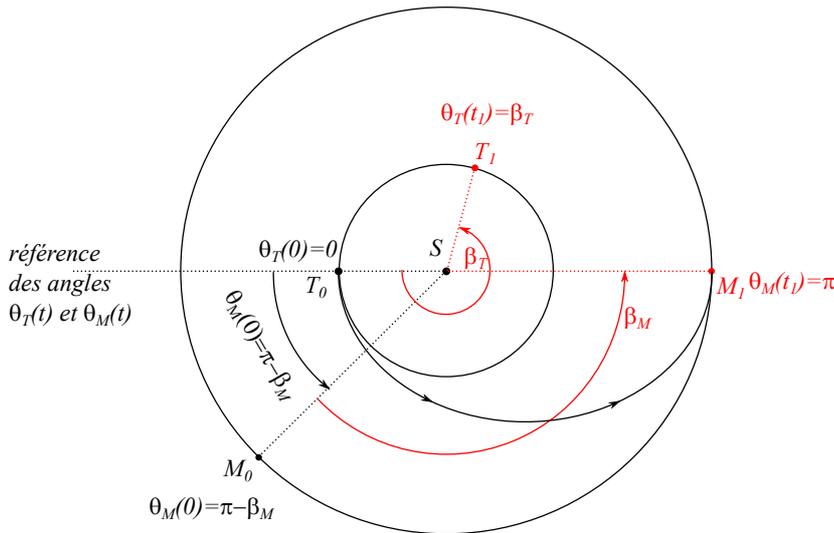


Q17. Le transfert se fait sur une demi-orbite, donc la durée du transfert $T_{\text{transfert}}$ est égale à la moitié de la période de révolution sur l'orbite de transfert. On utilise encore une fois la troisième loi de Kepler, en prenant par exemple appui sur les données numériques de la Terre :

$$\frac{a^3}{(2T_{\text{transfert}})^2} = \frac{a_T^3}{T_T^2} : T_{\text{transfert}} = \frac{T_T}{2} \left(\frac{a}{a_T} \right)^{3/2} = 258 \text{ j}$$

L'énoncé ne précise pas que les sens de parcours des orbites sont identiques (imposés par la Terre et Mars, et de manière à limiter les vitesses relatives pour le vaisseau). Les orbites de Mars et de la Terre sont supposées circulaires donc parcourues à vitesse angulaire $\Omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$ et $\Omega_T = \frac{2\pi}{T_T}$, constantes d'après la loi des aires.

On choisit l'origine des angles comme indiqué à la figure ci-dessous, sur l'axe ST_0 :



- on note β_M l'angle que doit parcourir Mars pendant la durée $T_{\text{transfert}}$ du transfert, donc pour passer de M_0 à M_1 ;
- on note β_T l'angle que va parcourir la Terre pendant la même durée $T_{\text{transfert}}$ du transfert, donc pour passer de T_0 à T_1 ;

On a donc $\beta_M = \frac{2\pi}{T_M} T_{\text{transfert}} = 2,36 \text{ rad}$ et $\beta_T = \frac{2\pi}{T_T} T_{\text{transfert}} = 4,44 \text{ rad}$.

Pour préparer les questions suivantes, on va repérer la position de Terre et Mars à chaque instant.

Notons $\theta_T(t)$ la position angulaire de la Terre, avec $\theta_T(0) = 0$ à l'instant $t = 0$ correspondant au départ depuis la Terre, quand T était en T_0 . On a donc :

$$\theta_T(t) = \Omega_T t.$$

Notons θ_M la position angulaire de Mars, avec la même origine angulaire (axe ST_0). Puisque, $\theta_M(0) = \pi - \beta_M$ à l'instant $t = 0$, quand M était en M_0 , on a donc :

$$\theta_M(t) = \pi - \beta_M + \Omega_M t.$$

Q18. Pour effectuer un nouveau transfert depuis la Terre vers Mars, il faut qu'au moment du nouveau lancement, l'avance angulaire de Mars sur la Terre soit de $\pi - \beta_M$ (modulo 2π). Par rapport au premier lancement, il faudra donc que l'angle entre ST et SM ait augmenté d'un multiple entier de 2π :

$$\theta_T(T_{\text{synod}}) - \theta_M(T_{\text{synod}}) = \theta_T(0) - \theta_M(0) + 2\pi$$

$$\Omega_T \times T_{\text{synod}} - \Omega_M \times T_{\text{synod}} = 2\pi .$$

La durée (période synodique) entre deux dates possibles de lancement successives depuis la Terre est donc $T_{\text{synod}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_T} - \frac{2\pi}{T_M}}$, c'est-à-dire $T_{\text{synod}} = \frac{T_T T_M}{T_M - T_T} = 780$ jours, ce qui est bien la valeur donnée dans l'énoncé.

Q19. Retour sur Terre :

Conformément aux notations proposées par l'énoncé, on note M_2 et T_2 les positions de Mars et de la Terre à un instant t_2 où il est possible de lancer le retour sur Terre.

La durée du retour sur Terre, selon une demi-ellipse de Hohmann prendra la même durée, $T_{\text{transfert}}$ que le transfert de Terre sur Mars (même demi-ellipse).

Pendant la durée de ce transfert retour, la Terre va tourner d'un angle β_T , et Mars d'un angle β_M .

Et une demi-ellipse correspond à un décalage angulaire de π . Autrement dit, il faut que

$$\theta_T(t_2 + T_{\text{transfert}}) = \theta_M(t_2) + \pi + 2n\pi.$$

Le $+2n\pi$ est un modulo 2π , n étant un entier.

Il faut donc que :

$$\theta_T(t_2) + \beta_T = \theta_M(t_2) + \pi + 2n\pi.$$

C'est-à-dire $\theta_T(t_2) - \theta_M(t_2) = \pi - \beta_T + 2n\pi$.

On remplace les fonctions angulaires du temps par leurs expressions données en Q17 :

$$\Omega_T t_2 - (\pi - \beta_M + \Omega_M t_2) = \pi - \beta_T + 2n\pi;$$

c'est-à-dire :

$$2\pi t_2 \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right) = -\beta_T - \beta_M + 2(n+1)\pi = -\beta_T - \beta_M + 2m\pi, \quad m \text{ étant un entier.}$$

Puisqu'on a choisi l'origine des temps $t = 0$ au moment du départ depuis la Terre, l'arrivée sur Mars avait eu lieu à $t = T_{\text{transfert}}$. La durée d'attente pour un voyage retour sur Terre est donc $T_{\text{attente}} = t_2 - T_{\text{transfert}}$, donc

$$T_{\text{attente}} = \frac{-\beta_T - \beta_M + 2m\pi}{2\pi \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right)} - T_{\text{transfert}}.$$

On remplace les angles β_M et β_T par leurs valeurs trouvées en Q17 :

$$T_{\text{attente}} = \frac{-\frac{2\pi}{T_T} T_{\text{transfert}} - \frac{2\pi}{T_M} T_{\text{transfert}} + 2m\pi}{2\pi \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right)} - T_{\text{transfert}} = \frac{-\frac{1}{T_T} T_{\text{transfert}} - \frac{1}{T_M} T_{\text{transfert}} + m}{\left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right)} - T_{\text{transfert}}.$$

Puis

$$T_{\text{attente}} = \frac{m - \frac{2T_{\text{transfert}}}{T_T}}{\left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right)}.$$

On peut, si on veut, réintroduire la période synodique, vue en Q18 :

$$T_{\text{attente}} = T_{\text{synod}} \left(m - \frac{2T_{\text{transfert}}}{T_T} \right)$$

La durée minimale d'attente est obtenue en prenant la valeur minimale de m pour laquelle $T_{\text{attente}} > 0$.

Or, $2T_{\text{transfert}}/T_T = 1,4$, donc il faut prendre $m = 2$ et on obtient :

$$T_{\text{attente}} = 457 \text{ j}$$

Q20. Pour faire le dessin, on calcule les angles : $\theta_T(t_2) = \frac{2\pi - \beta_T - \beta_M + 2m\pi}{2\pi \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right)}$, ce qui donne 12,3 rad pour

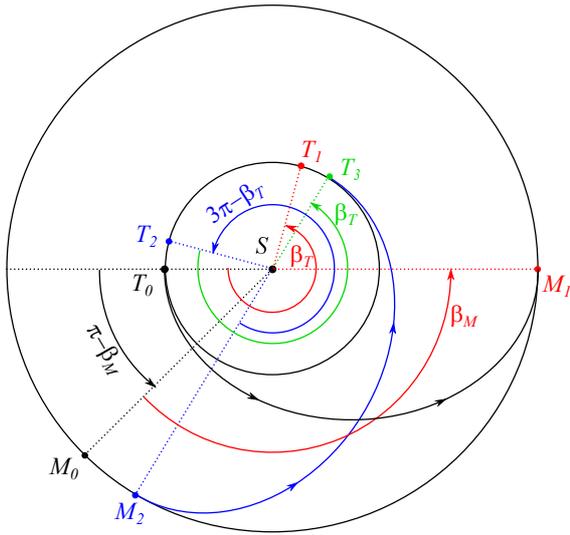
$m = 2$, c'est-à-dire $3,92\pi$.

Cela permet de placer le point T_2 .

Et $\theta_M(t_2) = \pi - \beta_M + \frac{2\pi - \beta_T - \beta_M + 2m\pi}{2\pi \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right)}$, ce qui donne 7,32 rad pour $m = 2$, c'est-à-dire $2,33\pi$.

Cela permet de placer le point M_2 . Le point T_3 de retour sur Terre n'était pas demandé, mais il est facile à trouver, il est décalé angulairement de π par rapport à M_2 .

Sur la figure apparaît également, en bleu, un angle $3\pi - \beta_T$. En effet, on avait vu que $\theta_T(t_2) - \theta_M(t_2) = \pi - \beta_T + 2n\pi$. Et $n = m - 1 = 1$ d'après les notations que nous avons adoptées dans Q19. Il vient donc $\theta_T(t_2) - \theta_M(t_2) = 3\pi - \beta_T$.



Q21. La mission totale Terre-Mars-Terre dure au minimum $T_{\text{transfert}} + T_{\text{attente}} + T_{\text{transfert}} = 973\text{j}$, ce qui est en accord avec l'énoncé (le 973 au lieu de 972 vient certainement de la durée d'une année, selon qu'on prend 365 jours, ou 365,25 jours).

À présent, on cherche la durée minimale d'une mission totale Mars-Terre-Mars.

La période synodique, T_{synod} introduite à la question Q18 est la période avec laquelle les deux planètes se retrouvent dans une même configuration.

Ainsi, avec l'origine des temps qui a été choisie jusqu'ici, les dates de départ possibles pour Mars depuis la Terre sont $t_{T \rightarrow M} = k_1 T_{\text{synod}}$, avec $k_1 \in \mathbb{N}$.

Et les dates de départ possibles pour la Terre depuis Mars sont $t_{M \rightarrow T} = t_2 + k_2 T_{\text{synod}}$, avec $k_2 \in \mathbb{N}$.

La durée minimale d'une mission Mars-Terre-Mars est donc $T_{MTM} = (k_1 T_{\text{synod}} + T_{\text{transfert}}) - (t_2 + k_2 T_{\text{synod}})$, d'où $T_{MTM} = (k_1 - k_2) T_{\text{synod}} + T_{\text{transfert}} - t_2$.

On voit apparaître dans le calcul l'expression de T_{attente} , utilisé à la question Q19, d'où :

$$T_{MTM} = (k_1 - k_2) T_{\text{synod}} - T_{\text{attente}},$$

$$\text{puis } T_{MTM} = \left(k_1 - k_2 - 2 + \frac{2T_{\text{transfert}}}{T_T} \right) T_{\text{synod}} = \left(k_3 + \frac{2T_{\text{transfert}}}{T_T} \right) T_{\text{synod}}, \quad k_3 \in \mathbb{Z}.$$

Et l'entier k_3 est le plus petit entier tel que $T_{MTM} \geq 2T_{\text{transfert}}$,

c'est-à-dire tel que $k_3 + \frac{2T_{\text{transfert}}}{T_T} \geq \frac{2T_{\text{transfert}}}{T_{\text{synod}}}$.

Or, $2T_{\text{transfert}} \left(\frac{1}{T_{\text{synod}} - \frac{1}{T_T}} \right) = -0,752$. Il vient donc $k_3 = 0$, puis $k_1 - k_2 = 2$, d'où

$$T_{MTM} = \frac{2T_{\text{transfert}}}{T_T} T_{\text{synod}} = 1,10 \times 10^3 \text{j}.$$

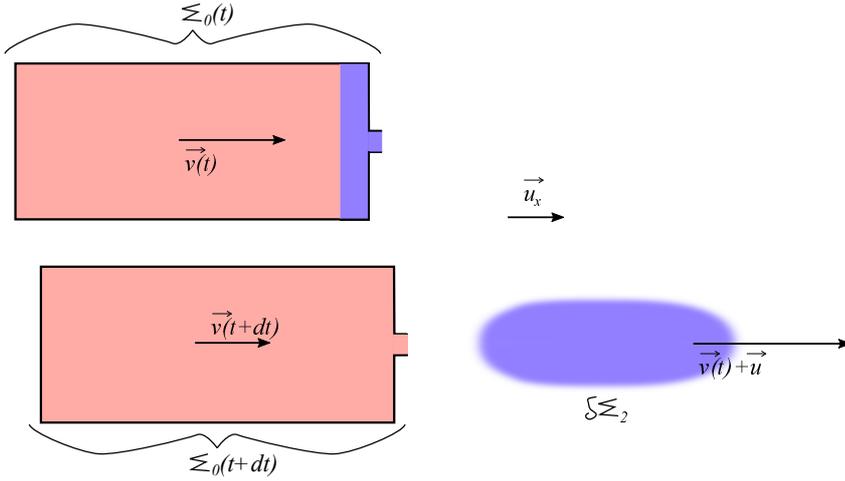
L'aller-retour grâce à l'orbite de Hohman n'est donc pas envisageable en 549j.

IV.B - La récupération de Mark Watney

Q22. On raisonne sur la figure ci-dessous.

La méthode utilisée ici pour freiner consiste à éjecter de la matière. C'est ce qu'on appelle un freinage par réaction. C'est le même principe que celui de la propulsion par réaction, utilisé par des fusées au décollage, mais puisqu'il s'agit ici de freiner, la matière doit être éjectée vers l'avant du véhicule, et non vers l'arrière.

On cherche un volume d'air, mais il faut commencer par calculer la masse à éjecter, pour freiner. On convertira ensuite la masse en volume, en tenant compte des conditions de température et pression.



On se place dans le référentiel de Mars,

que l'on suppose galiléen compte tenu de la faible durée de l'étude par rapport au mouvement de Mars autour du Soleil On note :

- u la norme de la vitesse relative d'éjection des gaz,
- D_m le débit massique des gaz sortant d'Hermès,
- m_0 la masse d'Hermès, avec son contenu, avant le freinage,
- v_i la norme de la vitesse d'Hermès avant le freinage,
- v_f la norme de la vitesse d'Hermès après le freinage,
- Δv (quantité positive) la diminution de vitesse souhaitée pour Hermès (donc $v_f = v_i - \Delta v$),
- m_{ej} la masse de gaz totale éjectée pendant le freinage

On définit le système fermé Σ^* , de masse $m(t)$ de la façon suivante :

- $\Sigma^*(t) = \Sigma_0(t)$, représente le vaisseau Hermès à l'instant t , avec tout ce qu'il contient ;
- $\Sigma^*(t+dt) = \Sigma_0(t+dt) \cup \delta\Sigma_2$, représente la réunion du vaisseau Hermès à l'instant $t+dt$, avec tout ce qu'il contient, et de la masse δm de gaz qui s'en est échappé entre t et $t+dt$;

La quantité de mouvement de notre système fermé s'écrit, à l'instant t :

$$\vec{p}^*(t) = m(t) v(t) \vec{u}_x ;$$

ou encore, en allégeant la notation :

$$\vec{p}^*(t) = mv\vec{u}_x ;$$

La quantité de mouvement de notre système fermé s'écrit, à l'instant $t+dt$:

$$\vec{p}^*(t+dt) = (m(t) - D_m dt) v(t+dt) \vec{u}_x + D_m dt (u + v(t)) \vec{u}_x ;$$

ou encore, en allégeant la notation :

$$\vec{p}^*(t+dt) = (m - D_m dt) (v + dv) \vec{u}_x + D_m dt (u + v) \vec{u}_x ;$$

c'est-à-dire :

$$\vec{p}^*(t+dt) = (mv + mdv - D_m dtv - D_m dt dv + D_m dtu + D_m dtv) \vec{u}_x ;$$

soit :

$$\vec{p}^*(t+dt) = (mv + mdv - D_m dt dv + D_m dtu) \vec{u}_x ;$$

Et en se limitant à l'ordre 1 en infiniment petit :

$$\vec{p}^*(t+dt) = (mv + mdv + D_m dtu) \vec{u}_x ;$$

On en déduit :

$$\frac{d\vec{p}^*}{dt} = \frac{\vec{p}^*(t+dt) - \vec{p}^*(t)}{dt} = \left(m \frac{dv}{dt} + D_m u \right) \vec{u}_x .$$

On applique à présent le théorème de la résultante dynamique, dans le référentiel de Mars, au système fermé Σ^* .

Or, on est dans le vide, donc il n'y a pas de frottements. Et vue la brièveté de l'étude, la force gravitationnelle peut être négligée, et le référentiel de Mars considéré galiléen (si elle n'éjectait pas de gaz, le mouvement d'Hermès pourrait être considéré rectiligne uniforme sur cette durée).

$\frac{d\vec{p}^*}{dt} = \vec{0}$ conduit à

$$m \frac{dv}{dt} = -D_m u ,$$

c'est-à-dire à

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt} u ,$$

qui se simplifie en

$$dv = \frac{dm}{m} u .$$

On intègre entre le début et la fin du freinage :

$$v_f - v_i = u \ln \left(\frac{m_0 - m_{ej}}{m_0} \right) ;$$

d'où $\Delta v = -u \ln \left(\frac{m_0 - m_{ej}}{m_0} \right)$, puis $m_0 - m_{ej} = m_0 \exp \left(\frac{-\Delta v}{u} \right)$, et finalement,

$$m_{ej} = m_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta v}{u} \right) \right) .$$

Il ne reste plus qu'à traduire cette masse en volume. On peut supposer que l'air dans les modules (on nous parle de "modules de service") est à la pression et à la température de l'atmosphère terrestre, donc que la masse volumique de l'air est environ $\mu_{air} = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$.

Et on prendra pour m_0 la masse d'Hermès, estimée dans l'énoncé à 500 tonnes, pour Δv , 30 m s^{-1} , pour u , 500 m s^{-1} .

Le volume d'air à éjecter est alors :

$$V_{ej} = \frac{m_{ej}}{\mu_{air}} = \frac{m_0}{\mu_{air}} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta v}{u} \right) \right) = 24 \times 10^3 \text{ m}^3 .$$

À titre de comparaison, le volume d'air dans une maison de deux étages, de surface au sol 100 m^2 est environ $100 \times 2 \times 2,5 = 5 \times 10^2 \text{ m}^3$. Donc le volume d'air à éjecter serait celui d'une cinquantaine de maisons de taille moyenne. Cela paraît beaucoup !

Q23. Inutile de tout refaire, on va s'appuyer sur la question précédente : on y a établi que le fait d'éjecter du gaz avec une vitesse relative u et un débit massique D_m procure une force de poussée de norme $F_p = D_m u$.

On peut supposer que la température dans le scaphandre est similaire à celle des modules de service, donc la vitesse d'éjection est de l'ordre de $u = 500 \text{ m s}^{-1}$.

Pour évaluer la masse volumique de l'air dans le scaphandre, on peut se fier aux données de droite de la figure 1, d'où $\mu'_{air} = \frac{PM}{RT} = \frac{4,75 \times 6890 \times 29 \cdot 10^{-3}}{8,31 \times (273 + 18,5)} = 0,39 \text{ kg m}^{-3}$.

En notant s la surface du trou dans le scaphandre, le débit volumique éjecté vaut $D'_v = su = 50 \text{ L s}^{-1}$. Cette valeur est élevée et ne permet pas de profiter de la poussée pendant une durée supérieure à quelques secondes, puisque le volume d'air dans le scaphandre ne doit pas dépasser quelques centaines de litres : $\Delta t' \simeq 5 \text{ s}$.

La force de poussée procurée par l'éjection d'air par le trou est donc

$$F'_p = D'_m u = \mu'_{air} s u^2 \simeq 10 \text{ N} .$$

Si on applique le théorème de la résultante dynamique à Mark Watney, comme on l'a fait à la question précédente pour Hermès et son contenu à l'instant t , on obtient, l'éjection se faisant cette fois vers l'arrière, $m \frac{dv}{dt} = F'_p$. Et puisque la masse m ne va pas beaucoup varier pendant l'éjection de l'air, on peut estimer la vitesse atteinte par Mark Watney à $v' = \frac{F'_p \Delta t'}{m} \simeq \frac{10 \times 5}{100} = 0,5 \text{ m s}^{-1}$.

Si la distance à parcourir est de l'ordre de 100 m, cela lui prendra quelques minutes. Et comme il n'aura plus d'air au bout de quelques secondes, il faudra le faire en apnée. Pas évident !!

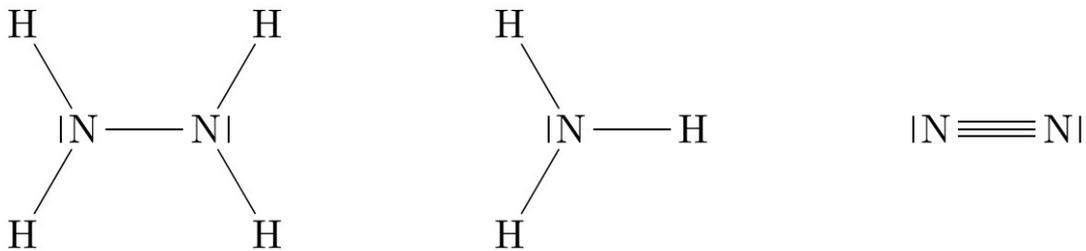
Mais surtout, l'image du film montre que le trou est près de sa main gauche, donc loin du centre de masse de Mark Watney. Une force propulsive excentrée devrait le faire tourner sur lui-même !

V Fabrication d'eau sur Mars

Q24. Dans N_2H_4 , il y a $2 \times 5 + 4 \times 1 = 14$ électrons de valence, donc 7 doublets à placer. On obtient la formule de Lewis ci-dessous à gauche.

Dans NH_3 , il y a $5 + 3 = 8$ électrons de valence, donc 4 doublets à placer. On obtient la formule de Lewis ci-dessous au centre.

Dans N_2 , il y a $2 \times 5 = 10$ électrons de valence, donc 5 doublets à placer. On obtient la formule de Lewis ci-dessous à droite.



Q25. La combinaison des 3 équations fournies concernant l'hydrazine donne $5 \text{ N}_2\text{H}_4 = 5 \text{ N}_2 + 10 \text{ H}_2$ soit $\text{N}_2\text{H}_4 = \text{N}_2 + 2 \text{ H}_2$, et d'autre part la combustion de H_2 s'écrit $2 \text{ H}_2 + \text{O}_2 = 2 \text{ H}_2\text{O}$: globalement une mole d'hydrazine permet de former 2 moles d'eau.

On peut écrire pour l'eau et l'hydrazine (n désignant le nombre de moles, \mathcal{M} la masse molaire, ρ la masse volumique, V le volume, et d la densité de l'hydrazine)

$$V(\text{H}_2\text{O}) = \frac{n(\text{H}_2\text{O}) \mathcal{M}(\text{H}_2\text{O})}{\rho(\text{H}_2\text{O})} ; V(\text{N}_2\text{H}_4) = \frac{n(\text{N}_2\text{H}_4) \mathcal{M}(\text{N}_2\text{H}_4)}{\rho(\text{N}_2\text{H}_4)} = \frac{n(\text{N}_2\text{H}_4) \mathcal{M}(\text{N}_2\text{H}_4)}{d \rho(\text{H}_2\text{O})}$$

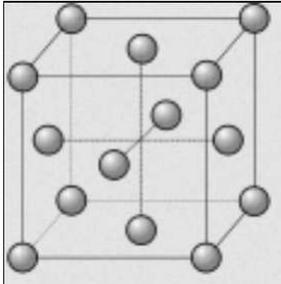
comme le nombre de moles d'hydrazine nécessaire est égal à la moitié nombre de moles d'eau à former

$$\frac{V(\text{N}_2\text{H}_4)}{V(\text{H}_2\text{O})} = \frac{n(\text{N}_2\text{H}_4) \mathcal{M}(\text{N}_2\text{H}_4)}{n(\text{H}_2\text{O}) \mathcal{M}(\text{H}_2\text{O})} \frac{\rho(\text{H}_2\text{O})}{d \rho(\text{H}_2\text{O})} = \frac{1}{2d} \frac{\mathcal{M}(\text{N}_2\text{H}_4)}{\mathcal{M}(\text{H}_2\text{O})}$$

Avec $V(\text{H}_2\text{O}) = 600 \text{ L}$, $\mathcal{M}(\text{N}_2\text{H}_4) = 32 \text{ g mol}^{-1}$, $d = 1,02$ et $\mathcal{M}(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g mol}^{-1}$

$$V(\text{N}_2\text{H}_4) = \frac{\mathcal{M}(\text{N}_2\text{H}_4)}{\mathcal{M}(\text{H}_2\text{O})} \frac{V(\text{H}_2\text{O})}{2d(\text{N}_2\text{H}_4)} = 523 \text{ L}$$

Q26. Un catalyseur ne modifie pas l'état d'équilibre thermodynamique, il n'influence que la cinétique de réaction.



Q27.

Le réseau cfc comporte 1 atome partagé entre 2 mailles au centre de chacune des 6 faces et 8 atomes partagés entre 8 mailles à chacun des sommets, soit $6/2 + 8/8 = 4$ atomes en propres : la masse d'une maille vaut $m = 4\mathcal{M}(\text{Ir})/\mathcal{N}_A$, pour un volume a^3 , soit une masse volumique

$$\rho = \frac{4\mathcal{M}(\text{Ir})}{\mathcal{N}_A a^3} = d \rho(\text{H}_2\text{O})$$

La tangence des atomes se fait selon les diagonales des faces de longueur $a\sqrt{2}$, donc le rayon atomique vérifie $4R = a\sqrt{2}$

Le rayon atomique est donc, avec $\mathcal{M}(\text{Ir}) = 192 \text{ g mol}^{-1}$

$$R = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{4\mathcal{M}(\text{Ir})}{\mathcal{N}_A d \rho(\text{H}_2\text{O})} \right)^{1/3} = 136 \text{ pm}$$

Remarque : la masse atomique de l'iridium ne figure pas dans l'énoncé !

Q28. On calcule successivement $\Delta_r H^0 = -222 + 2 \times 394 = 566 \text{ kJ mol}^{-1}$, $\Delta_r S^0 = 237 + 2 \times (198 - 214) = 205 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ puis dans l'approximation d'Ellingham à $T = 800^\circ \text{C} = 1073 \text{ K}$ $\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0 = 346 \text{ kJ mol}^{-1}$ et enfin

$$K^0 = \exp\left(\frac{-\Delta_r G^0}{RT}\right) = 1,4 \times 10^{-17}$$

La réaction est thermodynamiquement très défavorisée à cette température.

Q29. Puisque $\Delta_r H^0 > 0$, la réaction est endothermique donc défavorisée thermodynamiquement par une baisse de température d'après la loi de Van't Hoff $\left(\frac{d(\ln(K^0))}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} > 0\right)$: si on diminue la température, elle se déplace dans le sens indirect.

Q30. On cherche ici la température de flamme maximale donc adiabatique lors de la combustion isobare du dihydrogène.

L'équation-bilan s'écrit $2\text{H}_2 + \text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O}$, d'enthalpie standard $\Delta_r H^0 = -484 \text{ kJ mol}^{-1}$.

On suppose la réaction totale, avec un apport de réactifs en proportions stœchiométriques, sans composés inactifs. Le bilan de matière s'écrit

| espèces | H ₂ | O ₂ | H ₂ O |
|---------|----------------|----------------|------------------|
| initial | 2n | n | 0 |
| final | 0 | 0 | 2n |

L'avancement final de la réaction est $\xi = n$, et l'avancement initial nul. On décompose la transformation en une réaction isobare et isotherme pour laquelle $\Delta H_1 = n\Delta_r H^0$, suivi d'une variation de température isobare des $2n$ moles d'eau produites pour lequel $\Delta H_2 = 2nc_P(\text{H}_2\text{O})\Delta T$. Si la transformation réelle est adiabatique et isobare, le premier principe s'écrit

$$0 = Q_p = \Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = n\Delta_r H^0 + 2nc_P(\text{H}_2\text{O})\Delta T$$

on en déduit la variation de température

$$\Delta T = \frac{-\Delta_r H^0}{2c_P(\text{H}_2\text{O})} = 6,54 \times 10^3 \text{ °C}$$

Pour une température initiale de l'ordre de 20 °C la température maximale atteinte est de l'ordre de $6,56 \times 10^3 \text{ °C}$.

Cette valeur est critiquable : d'une part, l'approximation d'Ellingham n'est valable que pour un intervalle limité de température ; d'autre part, on néglige les pertes thermiques,...

VI Peut-on cultiver des pommes de terre sur Mars ?

VI.A - Métabolisme de la bactérie

Q31. Différents phénomènes de transport peuvent utiliser la notion de résistance :

— conduction électrique : $R = \frac{V_a - V_b}{I_{a \rightarrow b}}$

— conduction thermique : $R_{\text{th}} = \frac{T_a - T_b}{\phi_{\text{cd}, a \rightarrow b}}$

— écoulement visqueux dans une canalisation $R_{\text{hyd}} = \frac{P_a - P_b}{D_{v, a \rightarrow b}}$

De manière générale la résistance est définie par le rapport de la variation entre entrée et sortie de la grandeur intensive à l'origine du phénomène de transport au flux de la grandeur caractérisant le transport.

Q32. La question suivante suggère un calcul en 3D. La bactérie est supposée sphérique, et les conditions aux limites sont à symétrie sphérique : en coordonnées sphériques, la concentration $n_{\text{H}_2\text{O}_2}$ en peroxyde d'hydrogène ne dépend que de r , pas de θ ni φ . La loi de Fick, $\vec{j}_n = -D \text{grad}(n_{\text{H}_2\text{O}_2})$ donne $\vec{j}_n = -D \frac{dn_{\text{H}_2\text{O}_2}}{dr} \vec{u}_r$, où $j_n(r)$ désigne la densité de courant de particules. Le flux de peroxyde d'hydrogène évoqué par l'énoncé, a été choisi dirigé vers l'extérieur : $\phi = \phi_{i \rightarrow e}$. Et il s'exprime en moles par seconde. Donc dans ce problème, $n_{\text{H}_2\text{O}_2}$ représente une concentration, en moles par mètre cube : $n_{\text{H}_2\text{O}_2} = [\text{H}_2\text{O}_2]$, et j_n est en moles par mètre carré et par seconde.

D'après l'énoncé, on se place en régime stationnaire. Et il n'y a pas de terme de création dans l'épaisseur de la paroi de la bactérie. Donc ϕ ne dépend pas de r , pour $R - e \leq r \leq R$.

À la distance r du centre, $\phi = \phi_{i \rightarrow e} = 4\pi r^2 j_n(r)$.

Il vient :

$$j_n(r) = \frac{\phi}{4\pi r^2} = -D \frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]}{dr}$$

En intégrant cette relation entre la surface interne de la membrane ($[\text{H}_2\text{O}_2]_i$, $r = R - e$) et la surface externe ($[\text{H}_2\text{O}_2]_e$, $r = R$), on obtient la relation

$$\frac{\phi_{i \rightarrow e}}{4\pi} \left(\frac{1}{R - e} - \frac{1}{R} \right) = -D([\text{H}_2\text{O}_2]_e - [\text{H}_2\text{O}_2]_i) = D([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)$$

qui conduit à l'expression de la résistance

$$R_p = \frac{([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)}{\phi_{i \rightarrow e}} = \frac{1}{4\pi D} \left(\frac{1}{R-e} - \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{4\pi D} \frac{e}{R(R-e)}$$

Q33. Si $e \ll R$, l'expression précédente se simplifie en

$$R_p = \frac{1}{4\pi D} \frac{e}{R^2} = \frac{e}{DS}$$

où $S = 4\pi R^2$ est la surface de la bactérie : on retrouve le modèle 1D.

Q34. $V_i = 3,2 \times 10^{-15} \text{ L} = \frac{4\pi R^3}{3}$ conduit à

$$R = \left(\frac{3V_i}{4\pi} \right)^{1/3} = 9,1 \times 10^2 \text{ nm} \gg e = 9 \text{ nm}$$

on utilise l'expression simplifiée, avec $D = 2,0 \times 10^{-13} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$$R_p = \frac{e}{4\pi D R^2} = 4 \times 10^{15} \text{ s m}^{-3}$$

Q35. Le bilan de moles de particules pour une bactérie s'écrit :

$V_i[\text{H}_2\text{O}_2]_i(t+dt) = V_i[\text{H}_2\text{O}_2]_i(t) - \phi dt$, d'où :

$$\frac{d([\text{H}_2\text{O}_2]_i)}{dt} = -\frac{\phi}{V_i} = -\frac{[\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e}{V_i R_p}$$

Q36. $\frac{d([\text{H}_2\text{O}_2]_i)}{dt} = -k_d([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)$ où $k_d = 1/(R_p V_i) > 0$

k_d étant choisi positif dans l'énoncé, il faut donc choisir le signe $-$ dans la formule proposée en Q35. En effet, si $[\text{H}_2\text{O}_2]_i > [\text{H}_2\text{O}_2]_e$, les particules diffusent vers l'extérieur, donc $[\text{H}_2\text{O}_2]_i$ décroît et $\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{dt} < 0$.

$$k_d = \frac{1}{R_p V_i} = \frac{4\pi D R^2}{e \times \frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{3D}{eR} = 7 \times 10^1 \text{ s}^{-1}$$

VI.B -

Q37. Le dénominateur de l'expression de la vitesse montre que K_M a la dimension d'une concentration (mol L^{-1} ou mol m^{-3}).

— Si $[S] \ll K_M$, $v \approx v_{\max}[S]/K_M$: la réaction est d'ordre 1 par rapport au composé détruit par l'enzyme

— Si $[S] \gg K_M$, $v \approx v_{\max}$: la réaction est d'ordre 0 par rapport au composé

On peut considérer que K_M est une concentration caractéristique au-dessus de laquelle la vitesse de réaction est indépendante de la concentration de substrat, égale à v_{\max} : l'enzyme est saturé par le composé qu'il décompose, alors qu'en-dessous de cette concentration la réaction est d'ordre 1 par rapport au substrat. Il y a une sorte de dégénérescence de l'ordre.

VI.C -

Q38. On utilise la relation charge totale = $\sum_i \text{n.o.}_i$, avec $\text{n.o.}(\text{H}) = +I$

$$\begin{array}{cccc} \text{composé} & \text{H}_2\text{O}_2 & \text{H}_2\text{O} & \text{O}_2 \\ \text{n.o.} & -I & -II & 0 \end{array}$$

Il s'agit d'une réaction d'oxydoréduction (le nombre d'oxydation de l'oxygène est modifié), et c'est une réaction de dismutation puisque le peroxyde réagit avec lui-même pour former 2 espèces, l'une de degré d'oxydation plus élevé, l'autre de degré d'oxydation moins élevé.

Q39. On peut écrire les deux demi-réactions

— $(1/2) \text{H}_2\text{O}_2 + \text{H}^+ + \text{e}^- = \text{H}_2\text{O}$: réduction de l'oxydant H_2O_2 , couple $\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$, $E_1^0 = 1,77 \text{ V}$ et $\Delta_r \tilde{G}_1^0 = -\mathcal{F}E_1^0$;

— $(1/2) \text{H}_2\text{O}_2 = \text{H}^+ + (1/2) \text{O}_2 + \text{e}^-$: oxydation du réducteur H_2O_2 , couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}_2$, $E_2^0 = 0,69 \text{ V}$ et $\Delta_r \tilde{G}_2^0 = +\mathcal{F}E_2^0$

La réaction globale s'écrit (1) + (2) et met en jeu un électron. Par conséquent

$$\Delta_r G^0 = \mathcal{F} (E_2^0 - E_1^0)$$

et

$$K^0 = \exp\left(\frac{\mathcal{F} (E_1^0 - E_2^0)}{RT}\right) = \exp\left(\frac{(E_1^0 - E_2^0) \ln(10)}{0,06}\right) = 10^{\left(\frac{E_1^0 - E_2^0}{0,06}\right)} = 1,0 \times 10^{18}$$

La réaction de décomposition peut être supposée totale.

Q40. À l'intérieur de la bactérie, H_2O_2 apparaît du fait du métabolisme et disparaît du fait des réactions enzymatiques et de la diffusion vers le milieu extérieur à travers la paroi :

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{dt} = k_p - \frac{v_{\max}^{Ahp}[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{[\text{H}_2\text{O}_2]_i + K_M^{Ahp}} - \frac{v_{\max}^{Cat}[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{[\text{H}_2\text{O}_2]_i + K_M^{Cat}} - k_d([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)$$

Dans le milieu extérieur, la variation de la quantité de H_2O_2 est uniquement liée à la diffusion à travers la paroi bactérienne. Pour une bactérie le flux sortant vaut

$$\phi = \phi_{i \rightarrow e} = \frac{([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)}{R_p} = V_i k_d ([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)$$

D'où :

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_e}{dt} = \frac{\phi}{V_e} = \frac{V_i}{V_e} k_d ([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)$$

Q41. En régime stationnaire le bilan sur le volume extérieur aux bactéries impose l'égalité des concentrations intérieures et extérieures : puisque $\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_e}{dt} = 0$, $[\text{H}_2\text{O}_2]_i = [\text{H}_2\text{O}_2]_e$.

Et $\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{dt} = 0$ conduit à, compte tenu des approximations données :

$$0 = k_p - \frac{v_{\max}^{Ahp}[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{[\text{H}_2\text{O}_2]_i + K_M^{Ahp}} - \frac{v_{\max}^{Cat}[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{[\text{H}_2\text{O}_2]_i + K_M^{Cat}} = k_p - \frac{v_{\max}^{Ahp}[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{K_M^{Ahp}} - \frac{v_{\max}^{Cat}[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{K_M^{Cat}}$$

Q42. D'où

$$[\text{H}_2\text{O}_2]_i = k_p \left(\frac{v_{\max}^{Ahp}}{K_M^{Ahp}} - \frac{v_{\max}^{Cat}}{K_M^{Cat}} \right)^{-1} = 2,4 \times 10^{-8} \text{ mol L}^{-1} = 24 \text{ nmol L}^{-1}$$

L'approximation proposée par l'énoncé est vérifiée : $[\text{H}_2\text{O}_2]_i \ll K_M^{Ahp}$ et $[\text{H}_2\text{O}_2]_i \ll K_M^{Cat}$. Cette concentration est très faible : les enzymes contrôlent efficacement le niveau de H_2O_2 dans les bactéries.

VI.D - Situation de stress oxydant

Q43. En situation de stress oxydant, on nous dit que la concentration interne en peroxyde d'hydrogène atteint quasi instantanément la valeur exogène, d'où $[\text{H}_2\text{O}_2]_i = [\text{H}_2\text{O}_2]_e$ et la première équation différentielle obtenue en Q40 s'écrit :

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{dt} = k_p - \frac{v_{\max}^{Ahp}[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{[\text{H}_2\text{O}_2]_i + K_M^{Ahp}} - \frac{v_{\max}^{Cat}[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{[\text{H}_2\text{O}_2]_i + K_M^{Cat}}$$

Et sachant on peut supposer la concentration $[\text{H}_2\text{O}_2]_i = [\text{H}_2\text{O}_2]_e$ très supérieure aux concentrations K_{Cat} et K_{Ahp} . D'où

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{dt} = k_p - (v_{\max}^{Ahp} + v_{\max}^{Cat})$$

et compte tenu des valeurs numériques

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{dt} = -v_{\max}^{Cat}$$

Q44. Pour une bactérie, notons $\frac{dnb(\text{H}_2\text{O}_2)}{dt}$ le nombre de moles de peroxyde d'hydrogène qu'elle décompose par seconde.

$$\frac{dnb(\text{H}_2\text{O}_2)}{dt} = V_i \frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{dt} = -V_i v_{\max}^{Cat} = -1,6 \times 10^{-15} \text{ mol s}^{-1}$$

Q45. Dans un volume V_e , la concentration molaire en peroxyde d'hydrogène est $\frac{nb(\text{H}_2\text{O}_2)}{V_e}$. D'après la question précédente, pour une seule bactérie, la dérivée par rapport au temps de cette concentration est :

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]}{dt} = -\frac{V_i v_{\max}^{Cat}}{V_e}$$

Or, dans un volume V_e , il y a nV_e bactéries, donc la dérivée par rapport au temps de la concentration en peroxyde d'hydrogène est :

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]}{dt} = -nV_e \frac{V_i v_{\max}^{Cat}}{V_e} = -nV_i v_{\max}^{Cat} = C^{te}$$

On souhaite faire diminuer la concentration $[\text{H}_2\text{O}_2]$ de $[\text{H}_2\text{O}_2]_{init} = 1 \text{ mol L}^{-1}$ à $\frac{[\text{H}_2\text{O}_2]_{init}}{2} = 0,5 \text{ mol L}^{-1}$: $\Delta[\text{H}_2\text{O}_2] = -\frac{[\text{H}_2\text{O}_2]_{init}}{2} = -0,5 \text{ mol L}^{-1}$.

Comme la vitesse de dégradation est constante dans le domaine de concentration considéré

$$\Delta[\text{H}_2\text{O}_2] = -nV_i v_{\max}^{Cat} \Delta t$$

d'où

$$\Delta t = \frac{[\text{H}_2\text{O}_2]_{init}}{2nV_i v_{\max}^{Cat}} : \Delta t(n = 10^7 \text{ mL}^{-1}) = 3,2 \times 10^4 \text{ s} \approx 8,8 \text{ h} ; \Delta t(n = 10^9 \text{ mL}^{-1}) = 3,2 \times 10^2 \text{ s} \approx 5 \text{ min}$$

La population de bactéries doit être dense pour résister efficacement au stress oxydant.