

**Calculatrices interdites****Partie I – Corrosion (des données se trouvent page suivante)**

Lorsqu'une goutte d'eau stagne à la surface d'un métal, noté M, on observe qu'un phénomène de corrosion se développe principalement au centre de la goutte (figure 1).

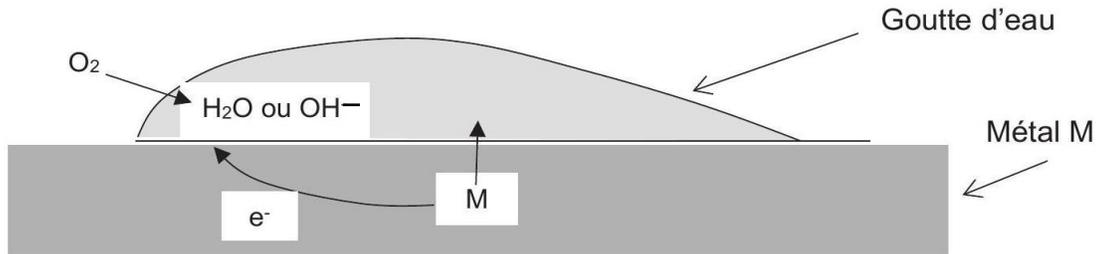


Figure 1 - Corrosion d'un métal par une goutte d'eau

Le métal est oxydé au centre en ions  $M^{n+}$ . Les électrons libérés circulent dans le métal. Ils sont récupérés par le dioxygène, plus concentré en périphérie, qui se réduit.

**Q1.** Quels sont les porteurs de charge qui assurent le rebouclage du courant électrique dans la goutte ? Pourquoi le phénomène de corrosion est-il plus prononcé en milieu marin que dans les terres ?

**Q2.** Soit le diagramme potentiel-pH simplifié du zinc ci-dessous, tracé à 25°C, en prenant les concentrations des espèces solubles égales à  $10^{-6}$  mol. L<sup>-1</sup>. Calculer la valeur de pH<sub>1</sub> puis la valeur de E<sub>1</sub>.

**Q3.** Indiquer les domaines d'immunité, de passivité et de corrosion.

**Q4.** Établir l'équation de la droite relative au couple H<sup>+</sup>/H<sub>2</sub>. Reproduire l'allure du diagramme du zinc puis y ajouter cette droite du couple H<sup>+</sup>/H<sub>2</sub>.

**Q5.** Une tôle en acier électrozingué est plongée dans une solution aqueuse de pH=6, désaérée par un barbotage de gaz argon afin de chasser le dioxygène de l'air dissous.

a) Écrire les équations des deux demi-réactions que l'on peut prévoir à la surface de la tôle, en s'appuyant sur le diagramme potentiel-pH.

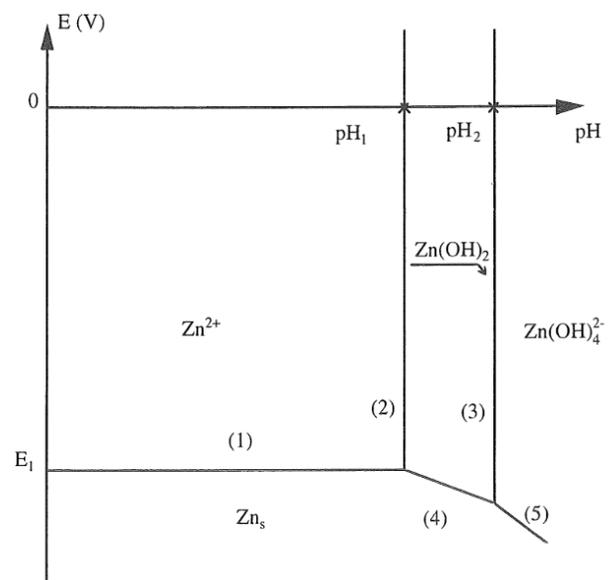
b) Calculer les potentiels de Nernst pour chacune de ces deux demi-réactions, à pH=6.

c) En fait, aucun dégagement gazeux n'est observé. Expliquer ce constat en calculant le potentiel de début de dégagement gazeux à partir de la valeur du surpotentiel.

**Q6.** La tôle d'acier électrozingué ayant été accidentellement rayée, l'acier est mis à nu au fond de la rayure. La tôle est plongée dans la solution aqueuse désaérée de pH=6.

a) Déterminer la valeur du potentiel rédox du couple Fe<sup>2+</sup>/Fe, en prenant les concentrations en espèces solubles contenant du fer égales à  $10^{-6}$  mol. L<sup>-1</sup>.

b) Comparer ce potentiel à celui du couple Zn<sup>2+</sup>/Zn et écrire les demi-réactions qui interviennent au voisinage de la rayure en identifiant l'anode et la cathode.



c) Expliquer comment la présence du zinc empêche l'oxydation du fer.

**Q7.** La tôle électrozinguée non rayée est plongée dans une solution aqueuse de pH=6 non désaérée (donc aérée !). Indiquer les demi-réactions qui se déroulent à la surface de la tôle.

On rappelle que le surpotentiel cinétique  $\eta$  de dégagement est l'excès de potentiel qu'il faut appliquer à l'électrode par rapport au potentiel d'équilibre pour observer réellement le dégagement gazeux

$$\eta_c = E_{H_2\uparrow} - E_{H^+/H_2}$$

$$\eta_a = E_{O_2\uparrow} - E_{O_2/H_2O}$$

où  $E_{H_2\uparrow}$  et  $E_{O_2\uparrow}$  sont les potentiels de début de dégagement gazeux.

Données :

Potentiels normaux (standards) des systèmes

$$H^+ / H_2 : 0,00 \text{ V}$$

$$Zn^{2+} / Zn_s : -0,76 \text{ V}$$

$$Fe^{2+} / Fe_s : -0,44 \text{ V}$$



$$\text{Produit de solubilité de } \underline{Zn(OH)_2} \quad K_s = 10^{-16}$$

$$\text{Produit ionique de l'eau} \quad K_e = 10^{-14}$$

$$\text{Constante de l'équilibre } Zn(OH)_2 + 2OH^- \rightleftharpoons Zn(OH)_4^{2-} \quad K = 10^{-0,5}$$

Notations et conventions :

- P = 1 bar,
- le proton solvaté est noté  $H^+$  par convention,
- les activités sont assimilables aux concentrations,
- la température à laquelle sont faits calculs et expériences est de 25°C,
- le terme  $2,3 RT/F$  vaut 0,06 V,
- les potentiels sont indiqués par rapport à l'électrode normale à hydrogène,
- seules les espèces citées dans l'énoncé peuvent participer aux réactions.

Surpotentiels  $\eta_c$  de dégagement de dihydrogène : sur le zinc - 0,75 V  
sur le fer - 0,25 V

Surpotentiels  $\eta_a$  de dégagement de dioxygène sur le zinc ou sur le fer + 0,5 V

**Masses molaires**

- $M(Na) = 23 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- $M(Cl) = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

**Constante fondamentale :**  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

**Q8.** On considère le phénomène d'oxydation par une goutte d'eau d'un ensemble constitué d'une pièce de ferronnerie (assimilable à du fer) reliée électriquement à une autre pièce en zinc. Comment se nomme ce type de protection ?

**Q9.** On note  $m_{Zn}$  la masse de la pièce de zinc,  $M_{Zn}$  la masse molaire du zinc,  $F$  la constante de Faraday et  $I$  le courant de corrosion. Exprimer la durée de protection  $\Delta t$  de la pièce de ferronnerie en fonction de  $m_{Zn}$ ,  $M_{Zn}$ ,  $F$  et de  $I$ .

## Partie II - L'épreuve de la caserne (Fort-Boyard)

L'épreuve de la caserne (figure 2) utilise un tapis roulant motorisé par une machine asynchrone. Nous nous proposons ici d'en décrire le fonctionnement en régime permanent. Aucune connaissance préalable sur la machine asynchrone n'est requise.



Figure 2 - Épreuve de la caserne

## II. 1 - Présentation de la machine asynchrone

La machine asynchrone est constituée d'un rotor et d'un stator tous deux en fer feuilleté. Le rotor et le stator sont séparés par un entrefer de très faible épaisseur.

Dans la machine asynchrone diphasée, le stator est analogue au stator de la machine synchrone diphasée. Il se compose de deux enroulements décalés spatialement d'un angle de  $\pi/2$  et alimentés par des courants sinusoïdaux en quadrature de phase. Ces enroulements seront identifiés, dans toute la suite du problème, par les dénominations  $S_1$  et  $S_2$ .

Le rotor se compose également de deux enroulements, décalés spatialement d'un angle de  $\pi/2$ . Ils ne sont reliés à aucune alimentation mais refermés sur eux-mêmes et donc en court-circuit. Ces enroulements seront identifiés dans toute la suite du problème par les dénominations  $R_1$  et  $R_2$ .

On définit la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  liée au référentiel fixe, donc au stator. Le vecteur  $\vec{e}_x$  est normal à l'enroulement  $S_1$ . Le vecteur  $\vec{e}_z$  coïncide avec l'axe longitudinal de la machine.

## II. 2 - Étude du stator

On s'intéresse d'abord au seul enroulement  $S_1$  du stator.

On a représenté (figure 3) les lignes de champ magnétique créées par la spire centrale de l'enroulement  $S_1$  du stator, de vecteur normal  $\vec{e}_x$ , parcourue par un courant  $i_{S_1}(t)$ . Cette spire centrale est représentée en coupe par son conducteur "aller", orienté suivant le vecteur  $\vec{e}_z$ , et son conducteur "retour", orienté suivant  $-\vec{e}_z$ .

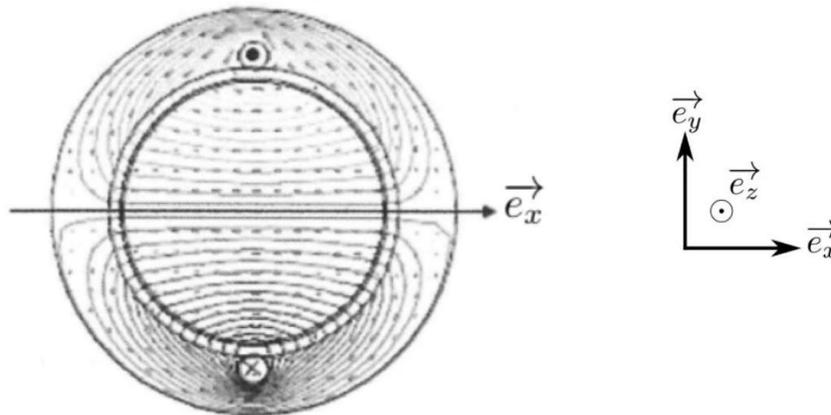


Figure 3 - Champ magnétique créé par la spire centrale de l'enroulement  $S_1$  du stator.

On définit la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  des coordonnées cylindriques (figure 4), où  $\vec{e}_z$  coïncide avec l'axe longitudinal de la machine. Un point  $M$  de l'entrefer est repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, z)$ . On a ainsi  $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ .

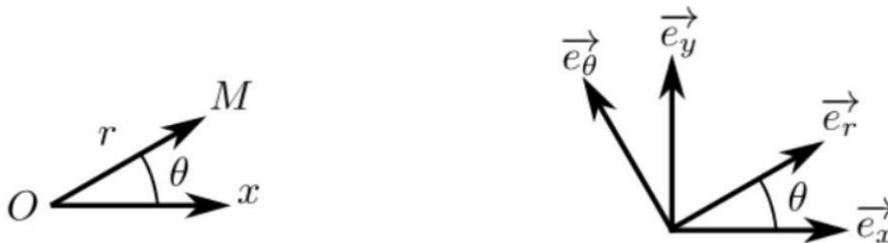
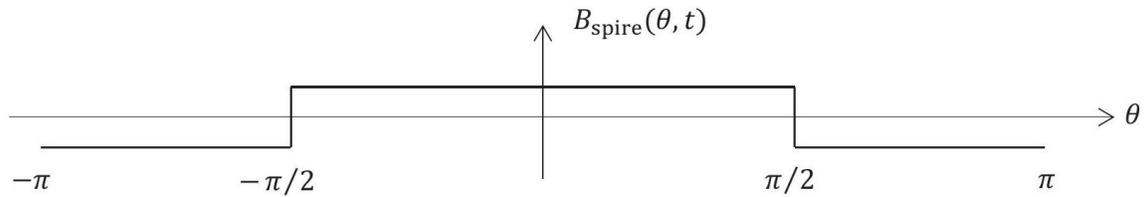


Figure 4 - Repérage d'un point de l'entrefer

Dans un modèle simple, on considère que la norme du champ magnétique est uniforme dans l'entrefer.

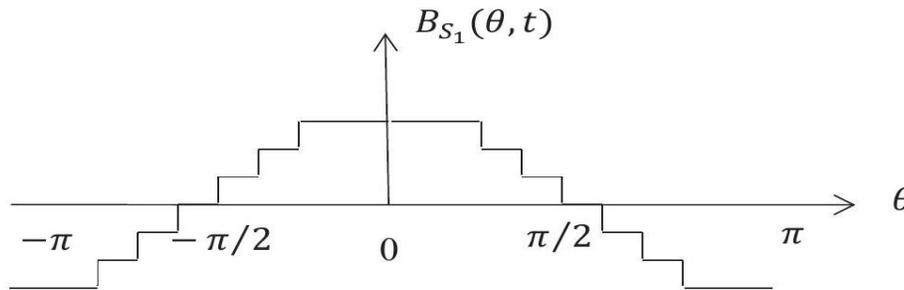
On désigne par  $\vec{B}_{\text{spire}}(\theta, t) = B_{\text{spire}}(\theta, t)\vec{e}_r$  le champ magnétique créé par cette spire centrale de l'enroulement  $S_1$  en un point  $M(r, \theta)$  de l'entrefer.

On donne figure 5 la représentation graphique de la fonction  $B_{\text{spire}}(\theta, t)$  pour  $i_{S_1} > 0$  et  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

Figure 5 - Modélisation simplifiée du champ créé par une seule spire de  $S_1$  dans l'entrefer

L'enroulement  $S_1$  du stator, parcouru par le courant  $i_{S_1}(t)$ , n'est pas constitué d'une seule spire mais de  $n$  spires décalées les unes par rapport aux autres. Le champ magnétique créé par l'ensemble des spires de l'enroulement  $S_1$  du stator est noté  $\vec{B}_{S_1}(\theta, t) = B_{S_1}(\theta, t)\vec{e}_r$ .

On donne figure 6 la représentation de la fonction  $B_{S_1}(\theta, t)$  pour  $i_{S_1} > 0$  et pour  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

Figure 6 - Modélisation simplifiée du champ créé par l'ensemble des spires de l'enroulement  $S_1$  dans l'entrefer

**Q10.** Préciser le nombre  $n$  de spires de l'enroulement  $S_1$ , décalées les unes par rapport aux autres, qui permettent de créer le champ magnétique  $\vec{B}_{S_1}(\theta, t)$  de la figure 6.

Dans la suite du problème, on admettra que les enroulements  $S_1$  et  $S_2$  du stator créent dans l'entrefer les champs magnétiques :

$$\begin{cases} \vec{B}_{S_1}(\theta, t) = K_S i_{S_1}(t) \cos(\theta) \vec{e}_r \\ \vec{B}_{S_2}(\theta, t) = K_S i_{S_2}(t) \sin(\theta) \vec{e}_r \end{cases}$$

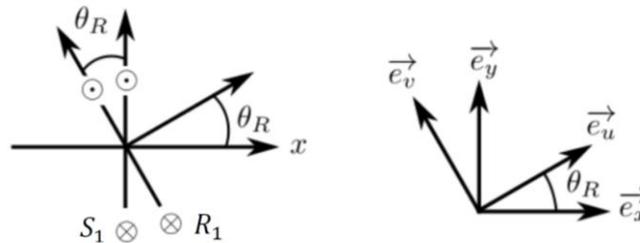
Par ailleurs, une alimentation électrique impose les courants :

$$\begin{cases} i_{S_1}(t) = I_{S_{\max}} \cos(\omega_s t) \\ i_{S_2}(t) = I_{S_{\max}} \sin(\omega_s t) \end{cases}$$

**Q11.** Déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_S$  créé par l'ensemble des deux enroulements  $S_1$  et  $S_2$  du stator dans l'entrefer. On posera  $B_{S0} = K_S I_{S_{\max}}$ . Justifier que ce champ magnétique est un champ tournant (ou « glissant ») dans le référentiel du stator à une vitesse angulaire  $\omega_1$  que l'on précisera.

Le rotor est repéré par sa position angulaire  $\theta_R$ . La position  $\theta_R = 0$  correspond à l'alignement des enroulements  $S_1$  du stator et  $R_1$  du rotor.

On définit la base  $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_z)$  liée au référentiel tournant du rotor (figure 7). Le vecteur  $\vec{e}_z$  coïncide avec l'axe longitudinal de la machine. L'enroulement  $R_1$  est orienté par le vecteur normal  $\vec{e}_u$ , l'enroulement  $R_2$  est orienté par le vecteur normal  $\vec{e}_v$ . Par souci de clarté, seules les spires centrales des enroulements  $S_1$  et  $R_1$  sont représentées sur la figure 7.

Figure 7 - Repérage de la position  $\theta_R$  du rotor

On note :

- $R_S$  et  $L_S$  la résistance et l'inductance propre de chaque enroulement du stator ;
- $R_R$  et  $L_R$  la résistance et l'inductance propre de chaque enroulement du rotor ;
- $M_{S_1 R_1} = M_{SR} \cos(\theta_R)$  (avec  $M_{SR}$  une constante) l'inductance mutuelle entre les enroulements  $S_1$  du stator et  $R_1$  du rotor ;
- $M_{S_2 R_1} = M_{SR} \sin(\theta_R)$  l'inductance mutuelle entre les enroulements  $S_2$  du stator et  $R_1$  du rotor.

**Q12.** Que vaut l'inductance mutuelle  $M_{S_1 S_2}$  entre les enroulements  $S_1$  et  $S_2$  du stator ? Que vaut la mutuelle  $M_{R_1 R_2}$  entre les enroulements  $R_1$  et  $R_2$  du rotor ?

**Q13.** Exprimer l'inductance mutuelle  $M_{S_1 R_2}$  entre les enroulements  $S_1$  du stator et  $R_2$  du rotor en fonction de  $M_{SR}$  et de  $\theta_R$ , ainsi que la mutuelle  $M_{S_2 R_2}$  entre les enroulements  $S_2$  du stator et  $R_2$  du rotor.

On se propose d'écrire l'équation électrique qui définit le courant  $i_{R_1}(t)$  associé à l'enroulement  $R_1$  du rotor.

**Q14.** Comment peut-on expliquer qu'un courant  $i_{R_1}(t)$  circule dans l'enroulement  $R_1$  alors qu'il n'est relié à aucune alimentation ?

**Q15.** On note respectivement  $\phi_{S_1 R_1}$  et  $\phi_{S_2 R_1}$  les flux créés dans l'enroulement  $R_1$  du rotor par les enroulements  $S_1$  et  $S_2$  du stator, en orientant les surfaces des spires dans le sens conjoint à celui de  $i_{R_1}$ . Exprimer le flux  $\phi_{S_1 R_1}$  en fonction de  $M_{SR}$ ,  $\theta_R$  et du courant  $i_{S_1}(t)$ . De même, exprimer le flux  $\phi_{S_2 R_1}$  en fonction de  $M_{SR}$ ,  $\theta_R$  et du courant  $i_{S_2}(t)$ .

On suppose que le rotor tourne à la vitesse angulaire constante  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$  avec  $0 \leq \Omega \leq \omega_S$ . On suppose également qu'à  $t = 0$ ,  $\theta_R(0) = 0$  de sorte que  $\theta_R(t) = \Omega t$ .

**Q16.** En remarquant que  $\theta_R$  et  $i_{S_1}$  dépendent du temps, exprimer en fonction de  $M_{SR}$ ,  $i_{S_1}$ ,  $\Omega$  et de  $t$  la force électromotrice (fem)  $e_{S_1 R_1}$  induite par  $S_1$  dans  $R_1$ . Faire de même pour la fem  $e_{S_2 R_1}$  induite par  $S_2$  dans  $R_1$ . On ne développera pas les expressions de  $i_{S_1}(t)$ ,  $i_{S_2}(t)$  et de leur dérivée dans cette réponse.

**Q17.** En déduire l'équation différentielle vérifiée par le courant  $i_{R_1}(t)$  en fonction de  $R_R$ ,  $L_R$ ,  $M_{SR}$ ,  $\Omega$ ,  $t$  et de  $i_{S_1}(t)$ ,  $i_{S_2}(t)$  et de leur dérivée. Cette équation différentielle peut être écrite sous la forme :

$$L_R \frac{di_{R_1}}{dt} + R_R i_{R_1} = A \sin(\omega t)$$

Préciser les expressions de  $A$  et de  $\omega$  en fonction de  $M_{SR}$ ,  $I_{S_{\max}}$ ,  $\omega_S$  et de  $\Omega$ .

En régime permanent, le courant  $i_{R_1}(t)$  est sinusoïdal ; on note  $\omega_R$  sa pulsation et  $I_{R_{\max}}$  son amplitude maximale.

**Q18.** On rappelle que  $\omega_S > \Omega$ . Exprimer  $\omega_R$  en fonction de  $\omega_S$  et de  $\Omega$ .

**Q19.** Exprimer  $I_{R\max}$  en fonction de  $R_R, L_R, M_{SR}, I_{S\max}, \omega_S$  et de  $\Omega$ .

Que peut-on dire de  $I_{R\max}$  pour  $\omega_S = \Omega$  ?

Justifier alors le qualificatif de « machine asynchrone ».

On suppose que les courants  $i_{R_1}(t)$  et  $i_{R_2}(t)$  sont de la forme :

$$\begin{cases} i_{R_1}(t) = I_{R\max} \sin(\omega_R t - \varphi) \\ i_{R_2}(t) = -I_{R\max} \cos(\omega_R t - \varphi) \end{cases} \text{ avec } \varphi = \arctan\left(\frac{L_R \omega_R}{R_R}\right)$$

Les enroulements  $R_1$  et  $R_2$  du rotor créent respectivement, dans l'entrefer, des champs exprimés dans le référentiel fixe (celui du stator) de la forme :

$$\begin{cases} \vec{B}_{R_1}(\theta, t) = K_R i_{R_1}(t) \cos(\theta - \theta_R) \vec{e}_r \\ \vec{B}_{R_2}(\theta, t) = K_R i_{R_2}(t) \sin(\theta - \theta_R) \vec{e}_r \end{cases}$$

**Q20.** Dans le référentiel fixe (lié au stator), à quelle vitesse angulaire tourne le champ créé par le rotor ? Commenter.

**Q21.** Dans une machine à courant continu, le champ statorique est stationnaire. Les champs statorique et rotorique sont-ils synchrones quelle que soit la vitesse de rotation du rotor ? Si oui, expliquer brièvement comment est assurée cette synchronisation.

Le couple délivré par la machine est de la forme  $\vec{\Gamma} = \Gamma_z \vec{e}_z$ , avec :

$$\Gamma_z = \frac{\partial M_{S_1 R_1}}{\partial \theta_R} i_{S_1} i_{R_1} + \frac{\partial M_{S_1 R_2}}{\partial \theta_R} i_{S_1} i_{R_2} + \frac{\partial M_{S_2 R_1}}{\partial \theta_R} i_{S_2} i_{R_1} + \frac{\partial M_{S_2 R_2}}{\partial \theta_R} i_{S_2} i_{R_2}.$$

Le calcul étant fastidieux, on admettra pour la suite que :

$$\Gamma_z = \frac{M_{RS}^2 I_{S\max}^2 R_R (\omega_S - \Omega)}{R_R^2 + L_R^2 (\omega_S - \Omega)^2}$$

On définit le glissement de la machine par :

$$g = \frac{\omega_S - \Omega}{\omega_S} \text{ avec } 0 \leq g \leq 1$$

La puissance électromagnétique moyenne transmise par le stator au rotor est donnée par :

$$P_S = \Gamma_z \omega_S$$

Enfin, on note  $P_{JR}$  la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le rotor.

**Q22.** Relier  $P_S, P_{JR}$  et  $g$ .

**Q23.** Que vaut  $g$  au démarrage de la machine ? Le rendement de la machine est-il meilleur lorsque  $g$  est proche de 0 ou de 1 ? Justifier.

### Formules trigonométriques

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$