

Problème 1

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- x Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- x Ne pas utiliser de correcteur.
- x Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont autorisées

- Les résultats numériques exprimés sans unité ou avec une unité fautive ne seront pas comptabilisés.
- Les explications qualitatives des phénomènes interviennent dans la notation au même titre que les calculs.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le candidat ou la candidate.

Transmission d'énergie électrique sans fil

L'électricité de demain pourra-t-elle se passer de fils électriques ? La nécessité actuelle de supprimer les fils et réduire l'encombrement, ou encore la multiplication des appareils électriques à faible consommation contribuent au développement des techniques et dispositifs de transmission d'énergie sans fil, inspirés des travaux pionniers de Nikola Tesla au début du XX^e siècle. Les applications sont nombreuses et touchent divers domaines (voir figure 1) : de l'usage domestique (recharge d'appareils avec batteries, alimentation de petits appareils courants) au monde industriel (recharge de voitures électriques, applications diverses de la transmission de puissance, pour les trains par exemple), en passant par la médecine (apport d'énergie électrique aux implants, sans effectuer d'opérations chirurgicales lourdes).



Figure 1– Quelques applications de la transmission d'énergie sans fil, de gauche à droite : recharge de téléphone portable, recharge sans fil d'une voiture Nissan Leaf[®], pacemaker.

Il existe aujourd'hui différents moyens de transmission de puissance sans fil. Citons notamment le couplage inductif non résonant en champ proche, le couplage inductif résonant en champ proche (voir figure 2) et le rayonnement en champ lointain (voir figure 3). Les caractéristiques, avantages et inconvénients de ces techniques sont donnés dans le tableau ci-après. Nous développerons dans cette partie certains aspects du couplage inductif, non résonant puis résonant.



Figure 2– À gauche : couplage inductif non résonant en champ proche ; à droite : couplage inductif résonant en champ proche.

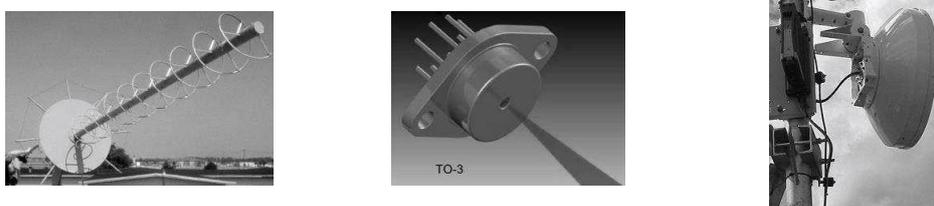


Figure 3– Quelques dispositifs de rayonnement en champ lointain, de gauche à droite : antenne à forte directivité, diode laser, antenne micro-onde.

Mentionnons que le transfert de puissance sans fil par couplage résonant a été récemment mis en évidence par l'équipe de recherche dirigée par Marin Soljacic, au *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), en réalisant une transmission de puissance de 60 W avec une distance de 2 m séparant les deux bobinages, permettant d'allumer une ampoule (voir figure 2). Ces travaux performants ont donné lieu à une publication dans la revue *Science* en 2007. C'est à cette occasion que le terme « *witricity* », contraction de *Wireless Electricity*, est apparu.

	Couplage non résonant	Couplage résonant	Rayonnement
Matériel nécessaire	bobines	bobines	antenne à grande directivité
Type de champ	magnétique	magnétique	électrique
Distance de transmission	faible	faible/moyenne	moyenne/grande
Puissance transmissible	faible	moyenne	moyenne/grande
Interactions avec le milieu	faible	faible	forte
Sécurité	élevée	élevée	potentiellement dangereux

Table 1– Comparaison des différentes techniques.

COUPLAGE INDUCTIF RÉSONANT E / Fonction de transfert

Pour observer un couplage inductif résonant, on insère dans le montage des condensateurs identiques de capacité C dans les circuits primaire et secondaire.

On définit le coefficient de couplage $k = M/M_{\max}$ entre les deux circuits, M représentant l'inductance mutuelle, et M_{\max} la valeur maximale qu'elle peut prendre. Du point de vue des calculs, les circuits couplés sont équivalents au circuit représenté sur la figure 12.

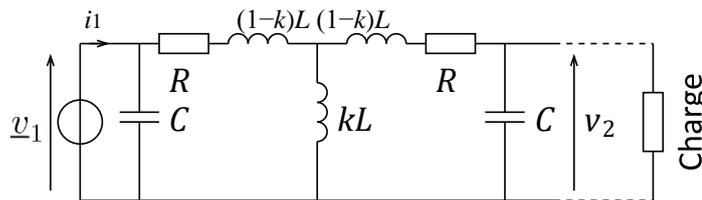


Figure 12 – Circuit électrique équivalent ramené au primaire.

On fournit ci-dessous sa fonction de transfert en sortie ouverte, c'est-à-dire sans la charge :

$$\underline{H} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{j\omega Lk}{R + j\omega(L + R^2C) - 2\omega^2 RLC + j\omega^3 CL^2(k^2 - 1)}$$

où ω désigne la pulsation. On donne les valeurs numériques des composants : $R = 10 \Omega$, $L = 0,86 \text{ mH}$, $C = 30 \text{ nF}$. Rappelons que $j^2 = -1$.

E1. Dans la limite où les bobines primaire et secondaire sont infiniment éloignées, quelle valeur attend-on pour le coefficient k ? Qu'en déduire concernant la tension v_2 aux bornes du circuit secondaire, d'après la fonction de transfert ? Vérifier cette valeur en analysant le circuit équivalent.

E2. Donner le schéma équivalent du circuit aux basses fréquences, et en déduire la valeur asymptotique de v_2 . Est-ce cohérent avec l'expression de \underline{H} ?

En utilisant l'expression de la fonction de transfert, on trace, pour une valeur de k arbitraire, le diagramme de Bode de ce système représentant l'évolution du gain en décibels $G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}|$ en fonction de la fréquence f (voir figure 13).

E3. Interpréter les comportements aux basses fréquences et hautes fréquences, en comparant les pentes des asymptotes (en dB/décade) mesurées sur le diagramme de Bode et celles déduites de l'expression de \underline{H} .

Dans le cadre des hypothèses $k \ll 1$ et $R \ll L\omega$ satisfaites expérimentalement (on les vérifiera dans la sous-partie suivante), on peut montrer que la fonction de transfert est approchée par : $\underline{H} \simeq \frac{k}{1+j\omega RC-\omega^2 LC}$

E4. Mettre la fonction de transfert simplifiée sous la forme canonique suivante : $\underline{H} = \frac{H_0}{1+\frac{j}{Q}(\frac{\omega}{\omega_0})-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$

et identifier les paramètres H_0 , Q et ω_0 en fonction de k , R , L et C .

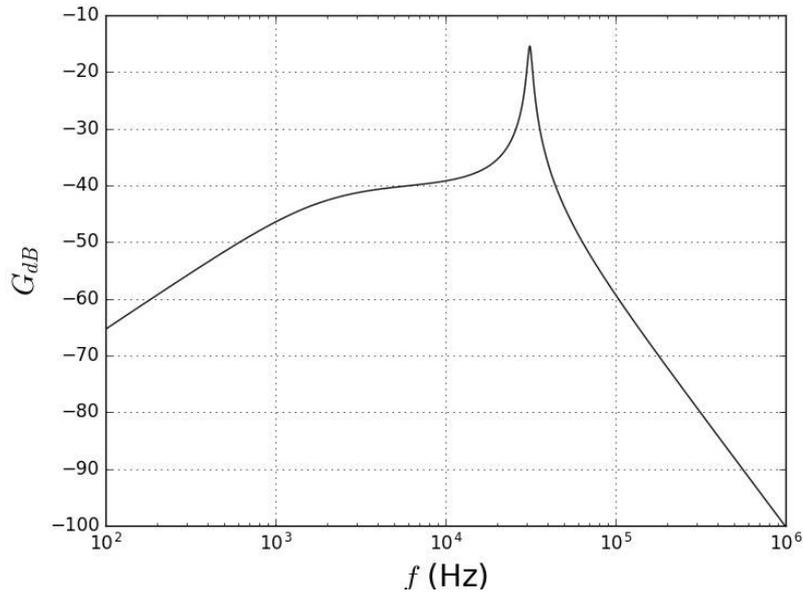


Figure 13– Diagramme de Bode en gain, obtenu pour $k = 0,01$.

E5. Déterminer l’expression de la fréquence de résonance du système f_r en fonction des paramètres du circuit puis la calculer numériquement. Commenter.

E6. La fréquence de résonance f_r dépend-elle de k ? Expliquer en quoi ce résultat est particulièrement intéressant, dans l’objectif d’un fonctionnement à récepteur mobile.

F / Résultats expérimentaux

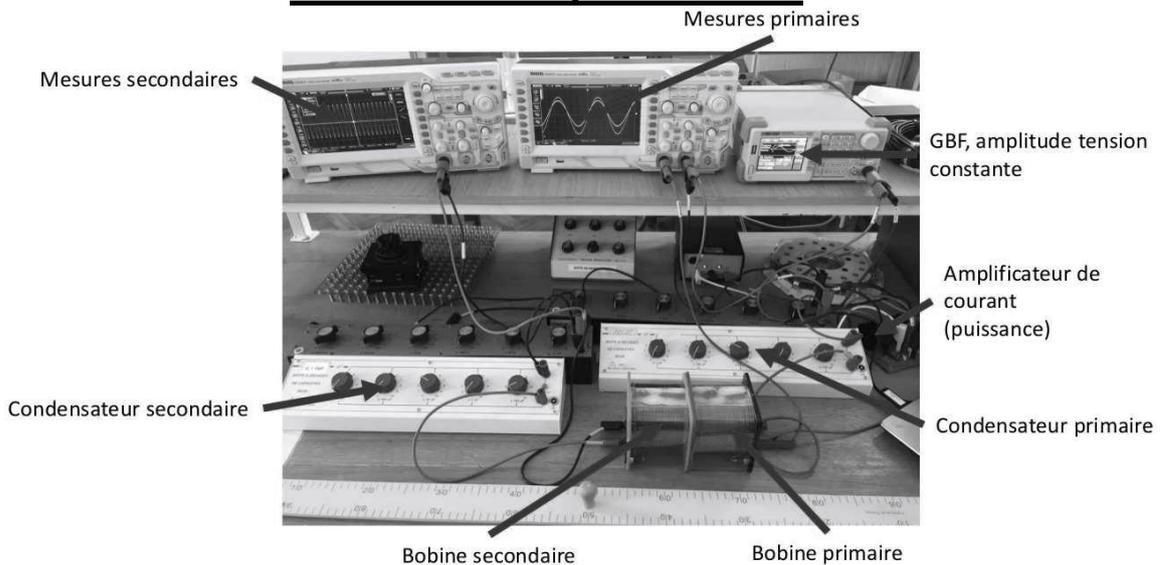


Figure 14 – Photographie légendée du montage expérimental.

On met en œuvre le montage de la figure 14 en choisissant les valeurs des composants suivantes : $R = 10 \Omega$, $L = 0,86 \text{ mH}$, $C = 30 \text{ nF}$, puis on trace son diagramme de Bode en gain (voir figure 15). Celui-ci fait nettement apparaître un phénomène de résonance.

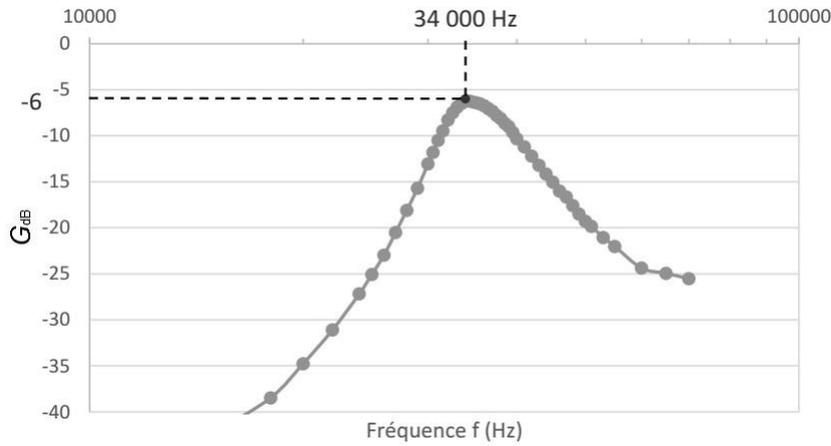


Figure 15 – Diagramme de Bode en gain expérimental : évolution du gain en décibels en fonction de la fréquence.

F1. Comparer la fréquence de résonance expérimentale à la prédiction théorique de la question **E5**.

F2. En analysant le diagramme de Bode en gain expérimental, déterminer (éventuellement en utilisant un solveur si l'équation à résoudre n'a pas de solution analytique) la valeur de k . Puis déterminer la valeur du facteur de qualité Q et la comparer à celle associée à son expression obtenue à la question **E4**.

L'hypothèse $k \ll 1$ faite dans la sous-partie précédente est-elle validée ?

Problème n°2 :

Dans tout le problème, les amplificateurs linéaires intégrés, notés ALI, sont supposés parfaits (gain infini, impédances d'entrée infinies, impédance de sortie nulle, vitesse de balayage infinie, courant de sortie non limité). Les tensions de saturation valent : $-V_{sat}$ et $+V_{sat}$.

Partie I : étude de l'oscillateur quasi-sinusoidal

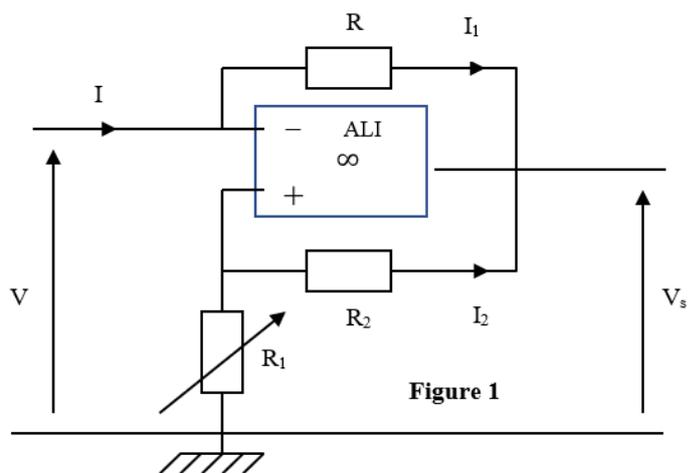
A) Simulation d'une résistance négative

1°) Dans le cas où l'ALI fonctionne en régime linéaire, déterminer une relation entre I_1 , I_2 et des résistances. En déduire une relation entre I , I_2 et des résistances, puis les relations donnant V en fonction de I , et V_s en fonction de I .

2°) Dans le cas où l'ALI fonctionne en régime saturé avec $V_s = +V_{sat}$, déterminer la relation donnant V en fonction de I , R et V_{sat} . Faire de même si $V_s = -V_{sat}$.

3°) Tracer la caractéristique statique V en fonction de I du dipôle de la figure 1, en rassemblant les trois résultats précédents.

Montrer que dans un intervalle donné de V : $V \in [-V_0, V_0]$, ce circuit se comporte comme une résistance négative de valeur $-R_n$ (avec $R_n > 0$). Exprimer R_n et V_0 en fonction de R_1 , R_2 , R et V_{sat} .



B) étude de l'oscillateur

L'oscillateur est constitué par la mise en parallèle d'un circuit appelé « boucle inductive » (bobine d'inductance L et de résistance R_b , et condensateur de capacité C_b), d'un condensateur de capacités C_s , et du dipôle étudié à la question précédente. On suppose que ce dernier est en régime linéaire de sorte que l'on peut l'assimiler à une résistance négative $-R_n$. On peut ainsi dessiner le schéma électrique équivalent de l'oscillateur, représenté figure 2.

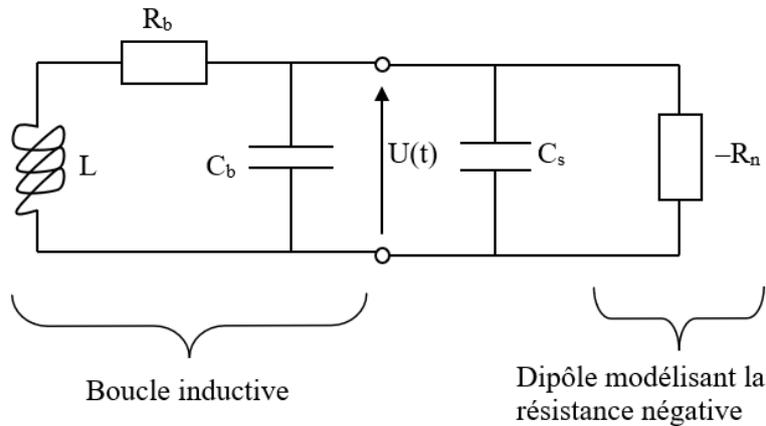


Figure 2

4°) Justifier que l'on puisse remplacer les deux condensateurs par un seul de capacité $C_{\text{éq}}$ dont on donnera l'expression en fonction de C_b et C_s .

5°) Montrer que la tension $U(t)$ aux bornes de la boucle vérifie une équation différentielle de la forme :

$$a \frac{d^2 U}{dt^2} + b \frac{dU}{dt} + (1 - c)U(t) = 0$$

Donner l'expression de a , b et c en fonction de L , $C_{\text{éq}}$, R_b et R_n .

6°) Quelle est la condition nécessaire sur b pour que les solutions de l'équation différentielle soient sinusoïdales ? En déduire la valeur à fixer à R_n en fonction de R_b et Q , avec $Q = \frac{1}{R_b} \sqrt{\frac{L}{C_{\text{éq}}}}$.

7°) Montrer que les solutions sont effectivement des sinusoïdes si $Q > Q_{\text{lim}}$, inégalité que l'on supposera vérifiée pour la suite. Que vaut Q_{lim} ?

8°) Calculer la fréquence f des oscillations en fonction de L , $C_{\text{éq}}$ et Q .

9°) En pratique, la condition $b=0$ ne permet pas d'amorcer les oscillations. Quel est le signe de b permettant l'amorçage de l'oscillateur ? R_n doit-il ainsi être plus petit ou plus grand que $Q^2 R_b$?

10°) Par quoi est limitée l'amplitude des oscillations générées par le circuit ?

Problème n°3 :**Hystérésis en électronique : trigger de Schmidt**

On considère le montage de la **figure 1** où l'amplificateur opérationnel est supposé parfait et idéal mais fonctionnant en régime non-linéaire. Le montage est alimenté par une tension $e(t)$ d'amplitude variable. La tension de sortie de l'amplificateur vaut $s = \pm V_{sat}$.

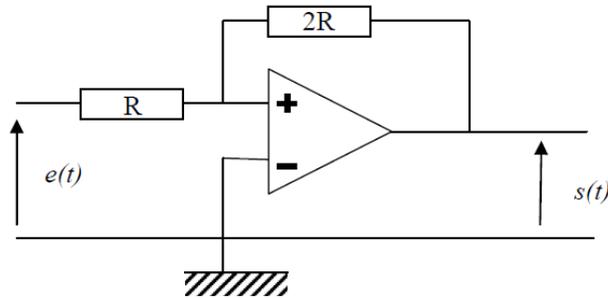


Figure 1 : montage trigger de Schmidt

- A.1** A quelle condition sur V_+ , potentiel de la borne d'entrée non-inverseuse, a-t-on $s = +V_{sat}$?
- A.2** Montrer que le potentiel V_+ s'écrit comme une combinaison linéaire des tensions e et s : $V_+ = \alpha \cdot e + \beta \cdot s$ où l'on précisera les valeurs des coefficients α et β .
- A.3** Supposons que la tension e soit suffisamment négative pour que s soit égale à $-V_{sat}$. La tension e augmente alors. Pour quelle valeur V_1 de e la sortie s bascule de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$?

Supposons maintenant que la tension e soit suffisamment positive pour que s soit égale à $+V_{sat}$. La tension e diminue alors. Pour quelle valeur V_2 de e la sortie s bascule de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$?

- A.4** Tracer avec le plus grand soin l'allure de la caractéristique $s(e)$ du montage. On précisera bien le sens de parcours de la caractéristique en y plaçant des flèches.

A.5 Applications :

- Quel type de montage linéaire, comprenant une résistance R et un condensateur C (entre autres) pourrait-on utiliser pour reboucler le précédent afin d'obtenir des oscillations de relaxation ?
- Dessiner ce montage linéaire, déterminer l'équation différentielle qui relie sa tension d'entrée à celle de sortie, et déterminer la forme de l'évolution de $e(t)$ et $s(t)$, en justifiant.
- Exprimer la période T de fonctionnement de ce montage en fonction de R et C.