

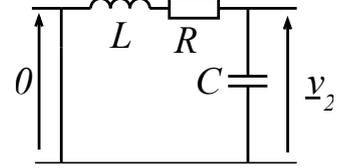
**Problème 1 e3a PSI 2020**

E1. Dans la limite où les bobines primaire et secondaire sont infiniment éloignées, il n'y a plus de couplage entre elles donc on attend la valeur  $k=0$ .

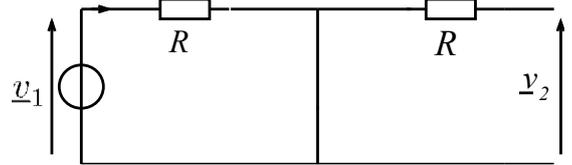
La fonction de transfert  $H$  tend alors vers 0, donc tension  $v_2$  aux bornes du circuit secondaire tend vers 0, d'après l'expression donnée de la fonction de transfert.

En effet, l'inductance  $kL$  devient nulle, donc la tension à ses bornes devient nulle. Ainsi, la partie droite du montage devient le schéma ci-contre. Et puisqu'on nous dit que le montage est « en sortie ouverte », il n'y a rien de branché après  $C$ . Le théorème du pont diviseur de tension nous donne en notation complexe

$$v_2 = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \times 0, \text{ d'où } v_2 = 0.$$



E2. Le schéma équivalent du circuit aux basses fréquences est ci-contre. La sortie étant toujours ouverte (cf énoncé), il n'y a pas de courant dans la résistance  $R$  de droite. Ainsi, la valeur asymptotique de  $v_2$  est la tension aux bornes du fil central, donc  $v_2 = 0$ . Et on voit bien que le numérateur de la fonction de transfert tend vers 0 quand  $\omega \rightarrow 0$ , alors que le dénominateur tend vers  $R$ , donc la fonction de transfert tend bien vers 0.



E3. Aux basses fréquences, on observe sur le graphe une pente de  $+20 \text{ dB/décade}$ , ce qui est en accord avec le comportement de  $H$  qui, aux basses fréquences se comporte comme  $\frac{j\omega Lk}{R}$ ; son module est donc bien proportionnel à  $|\omega|$ .

Aux hautes fréquences, on observe sur le graphe une pente de  $-40 \text{ dB/décade}$ , ce qui est en accord avec le comportement de  $H$  qui, aux hautes fréquences se comporte comme  $\frac{j\omega Lk}{j\omega^3 CL^2(k^2-1)}$ ; son module est donc bien proportionnel à  $\frac{1}{\omega^2}$ .

E4. Pour mettre la fonction de transfert simplifiée  $H \simeq \frac{k}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$  sous la forme canonique

$$H = \frac{H_0}{1 + \frac{j}{Q}(\frac{\omega}{\omega_0}) - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

pour tout un domaine de valeurs de la pulsation, il faut que les coefficients

des polynômes en  $j\omega$  soient les mêmes, d'où :  $k = H_0$  ;  $RC = \frac{1}{Q\omega_0}$  et  $-LC = -\frac{1}{\omega_0^2}$ .

On en déduit  $H_0 = k$  ;  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

E5. La fréquence de résonance du système  $f_r$  est celle qui rend le module de la fonction de transfert maximum, donc aussi celle qui rend le module au carré maximum. Donc la pulsation de résonance  $\omega_r$  est celle qui rend

$$\frac{H_0^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}$$

maximum, donc celle qui rend  $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}$  minimum.

Posons pour simplifier  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , et  $f(x) = (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ .

Il vient  $f'(x) = 2(1 - x^2)(-2x) + \frac{2x}{Q^2}$ .

Ainsi la dérivée s'annule pour  $x = 0$  et pour  $1 - x^2 = \frac{1}{2Q^2}$ .

$x = 0$  correspond à un extrémum local du gain en dB mais pas au maximum, pour lequel

$$x = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Nous ne gardons que la solution positive puisque nous cherchons une pulsation :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Et pour la fréquence,  $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ . D'où  $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2C}{2L}}$ .

Numériquement,  $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,86 \times 30 \times 10^{-12}}} \sqrt{1 - \frac{100 \times 30 \times 10^{-9}}{2 \times 0,86 \times 10^{-3}}} = 31 \text{ kHz}$ .

Commentaire : c'est proche de la fréquence du pic de la figure 13.

E6. La fréquence de résonance  $f_r$  ne dépend pas de  $k$ , comme le montre l'expression obtenue à la question précédente.

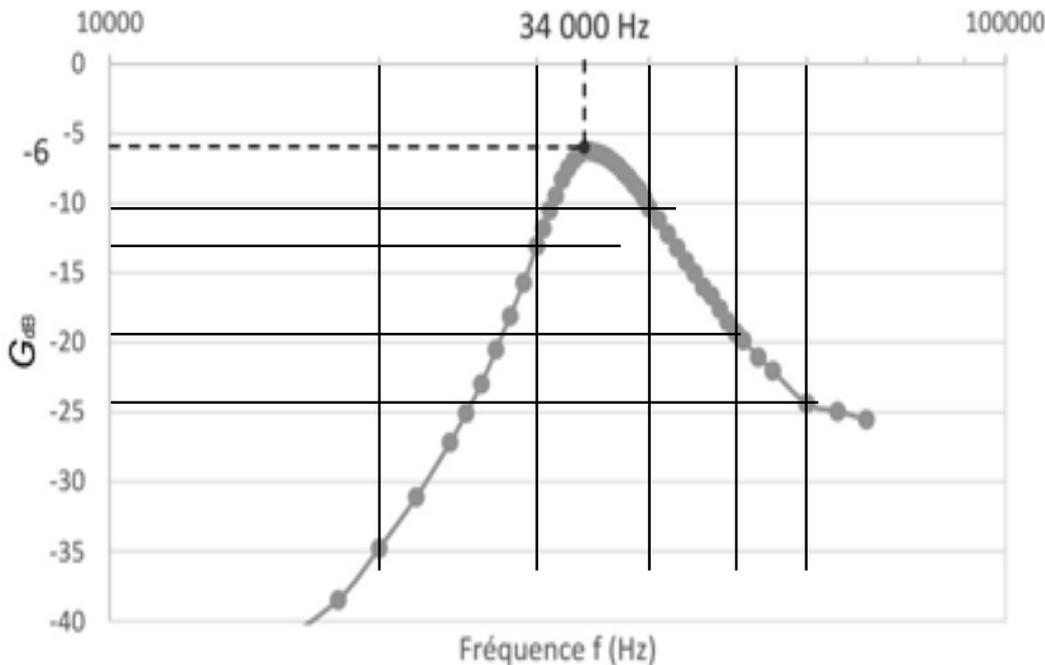
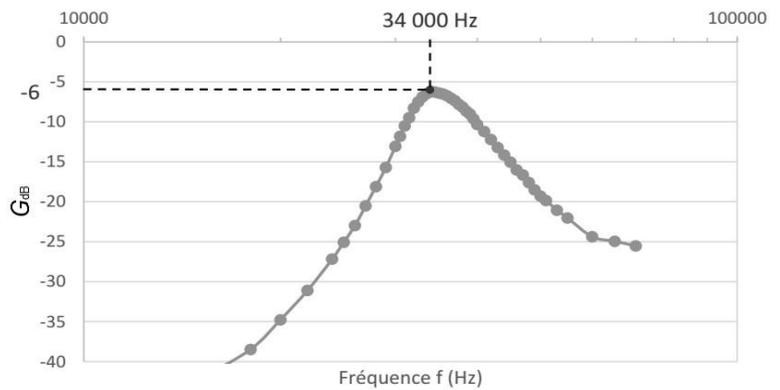
Ce résultat est particulièrement intéressant, dans l'objectif d'un fonctionnement à récepteur mobile, car son mouvement entraîne une modification de  $k$ , mais ceci ne change pas la fréquence de résonance. On peut donc la choisir une fois pour toute, et profiter des avantages de la résonance, même si le récepteur bouge.

### F / Résultats expérimentaux

Remarque préliminaire : dans le montage de la figure 14, les deux bobines sont l'une contre l'autre, donc on devrait avoir un bon couplage entre les deux, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse  $k \ll 1$ .

F1. On voit sur la figure 15 que la fréquence de résonance expérimentale est  $f_{r \text{ exp}} = 34 \text{ kHz}$ . C'est donc proche de la prédiction théorique de la question E5 mais l'écart est tout de même significatif.

F2. Prenons des points sur la figure 15 :



Le module de la fonction de transfert est  $|H| = \frac{H_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2}}} = \frac{k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2}}}$ .

À la pulsation de résonance,  $|H|_{max} = \frac{k}{\sqrt{\left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}} = \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}} = \frac{kQ}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

Compte tenu de la forme de la courbe, on peut dire directement que  $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$  puisqu'un filtre passe-bas ne présente une résonance qu'à cette condition. On peut même dire que le facteur de qualité est nettement supérieur à 1 puisque la résonance est marquée.

En conséquence,  $|H|_{max} \simeq kQ$ .

Et puisque  $G_{dB\ max} = -6\ dB$ ,  $kQ = 10^{(-\frac{6}{20})} \simeq 0,5$ .

$|H|_{max} \simeq H_0 Q$ , donc il faut connaître  $Q$  pour trouver  $H_0$ , c'est-à-dire  $k$  ici.

On voit sur le dessin que pour  $f = 30\ kHz$ ,  $G_{dB} \simeq -13\ dB$

$$\text{D'où } 10^{(-\frac{13}{20})} \simeq \frac{k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{30}{34}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{30}{34}\right)^2}}, \text{ puis } k \simeq 10^{(-\frac{13}{20})} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{30}{34}\right)^2\right)^2 + 4k^2 \left(\frac{30}{34}\right)^2}$$

Une résolution de cette équation au solveur donne  $k \simeq 0,054$ .

L'hypothèse  $k \ll 1$  serait donc assez réaliste, mais en désaccord avec la photo, pour laquelle les deux bobines sont accolées.

NB : on pourrait aussi prendre d'autres points de la courbe de la figure 15, pour confirmer, mais cela serait chronophage, et incompatible avec la durée de l'épreuve.

On poursuit les calculs pour trouver  $Q$ . Compte tenu de  $k \simeq 0,054$  et de  $kQ \simeq 0,5$ , il vient  $Q \simeq 9,2$ .

C'est sensiblement moins que ce que donne l'expression obtenue à la question E4 :

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{0,86 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-9}}} = 17. \text{ On obtient toujours un facteur de qualité expérimental inférieur à ce que donne la théorie.}$$

## **Problème n°2 : Centrale PSI**

### **PARTIE I :**

1°) Régime linéaire :  $V^+ = V^- = V$ . Ici, on n'a pas un véritable « miroir de courant » car les résistances des 2 rebouclages de l'ALI sont différentes. Néanmoins, on a :  $R_1 I_1 = R_2 I_2$ .

Et puisque  $I = I_1$  (d'après la loi des nœuds sur l'entrée inverseuse),  $R_1 I = R_2 I_2$ .

Or  $V_s = -(R_1 + R_2) I_2$ , d'où  $V_s = -R \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) I$ .  $V = V^+$  conduit à  $V = -R_1 I_2$ , d'où  $V = -\frac{R R_1}{R_2} I$ .

2°) Si  $V_s = +V_{sat}$ , on a tout de suite  $V = R I + V_{sat}$ . Si  $V_s = -V_{sat}$ , on a  $V = R I - V_{sat}$ .

3°) Les trois résultats précédents sont rassemblés dans le dessin ci-contre.

Si l'ALI n'est pas saturé, on a bien  $V = -R_n I$  avec  $R_n = \frac{R R_1}{R_2}$ .

Dans ce mode de fonctionnement,  $V_s$  est lié à  $I$  par la relation du 1°).

La saturation haute ( $V_s = V_{sat}$ ) se manifeste pour  $V_+ > V_-$ ,

c'est-à-dire  $\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s > V$ , donc  $V < V_0$ , avec  $V_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ .

Pour préciser le dessin :

En saturation haute, le raccordement avec le régime de fonctionnement linéaire vérifie à la fois

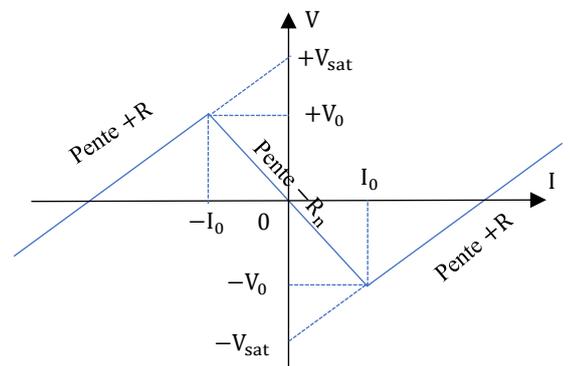
$V = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$  et  $V = -\frac{R R_1}{R_2} I$ , donc pour  $I = -I_0$ , en posant

$$I_0 = \frac{R_2}{R(R_1 + R_2)} V_{sat}.$$

De même  $V_s = -V_{sat}$  pour  $V_+ < V_-$ , c'est-à-dire  $\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s < V$ , donc

$V > -V_0$ . Le raccordement avec le fonctionnement linéaire vérifie à la fois  $V = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$  et  $V = -\frac{R R_1}{R_2} I$ , donc pour  $I = +I_0$ .

4°) Deux condensateurs en parallèle : on somme les capacités. D'où  $C_{\text{éq}} = C_b + C_s$ .



5°) schéma équivalent ci-contre :

Loi des nœuds :  $I_n = I_b + I_c$  . Or  $U = + R_n I_n$  (résistance négative et convention générateur).

$I_c = C_{\text{éq}} \frac{dU}{dt}$  et  $U(t) = R_b I_b + L \frac{dI_b}{dt}$  . On se débarrasse de  $I_b$  :

$$U(t) = R_b \left( \frac{U(t)}{R_n} - C_{\text{éq}} \frac{dU}{dt} \right) + L \frac{d}{dt} \left( \frac{U(t)}{R_n} - C_{\text{éq}} \frac{dU}{dt} \right)$$

D'où l'équation différentielle attendue avec :

$$\boxed{a = LC_{\text{éq}}}, \quad \boxed{b = R_b C_{\text{éq}} - \frac{L}{R_n}} \quad \text{et} \quad \boxed{c = \frac{R_b}{R_n}}$$

6°) il faut que  $\boxed{b=0}$ . Donc  $R_n$  doit valoir  $\frac{L}{R_b C_{\text{éq}}}$ , c'est-à-dire

$$\boxed{R_n = Q^2 R_b}$$

7°)  $b=0$  ne suffit pas, il faut aussi que  $(1-c) > 0$ , donc  $c < 1$  (sinon, les solutions sont des exponentielles réelles), donc que  $R_b < R_n$ . La valeur de  $R_n$  étant déjà fixée par la condition  $b=0$ , on obtient l'inégalité  $Q^2 > 1$ . Donc  $\boxed{Q_{\text{lim}}=1}$ .

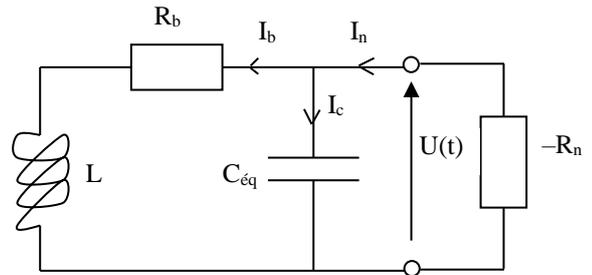
8°) On met l'équation sous la forme  $\ddot{U} + \omega^2 U(t) = 0$ , avec  $\omega = \sqrt{\frac{1-c}{a}}$ .

En remplaçant, on aboutit à : 
$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{\text{éq}}}} \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}$$

9°) Pour amorcer l'oscillation, il faut un régime sinusoïdal désamorti. C'est le cas si  $\boxed{b < 0}$ .

Il faut donc que  $R_b C_{\text{éq}} < \frac{L}{R_n}$ , c'est-à-dire que  $\boxed{R_n < Q^2 R_b}$ .

10°) L'amplitude des oscillations va être limitée par la saturation de l'ALI.



**Problème n°3 :**

A1.  $\varepsilon = V^+ - V^- = V^+$  . Si  $V^+ > 0$  alors  $s = + V_{\text{sat}}$

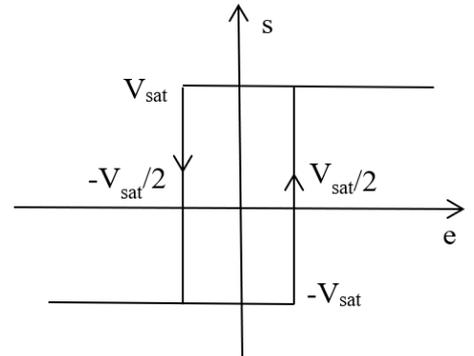
A2. La loi des nœuds exprimées avec les potentiels s'écrit :  $\frac{e-V^+}{R} = \frac{V^+-s}{2R}$ , d'où  $\boxed{V^+ = 2\varepsilon/3 + s/3}$   $\alpha = \frac{2}{3}$  et  $\beta = \frac{1}{3}$ .

A3. On a  $s = -V_{\text{sat}}$  tant que  $\varepsilon < 0$ , c'est-à-dire tant que  $V^+ < 0$ , c'est-à-dire  $\frac{2e}{3} - \frac{V_{\text{sat}}}{3} < 0$ , soit  $e < \frac{V_{\text{sat}}}{2}$ . Donc l'ALI sort de la saturation basse (donc sa sortie passe de  $-V_{\text{sat}}$  à  $+V_{\text{sat}}$ ) lorsque  $e$  atteint  $V_1$ , avec  $\boxed{V_1 = \frac{V_{\text{sat}}}{2}}$ .

On a  $s = +V_{\text{sat}}$  tant que  $\varepsilon > 0$ , c'est-à-dire tant que  $V^+ > 0$ , c'est-à-dire  $\frac{2e}{3} + \frac{V_{\text{sat}}}{3} > 0$ , soit  $e > -\frac{V_{\text{sat}}}{2}$ . Donc l'ALI sort de la saturation haute

(donc sa sortie passe de  $+V_{\text{sat}}$  à  $-V_{\text{sat}}$ ) lorsque  $e$  atteint  $V_2$ , avec  $\boxed{V_2 = -\frac{V_{\text{sat}}}{2}}$ .

A4. Voir ci-contre



A5. - Pour obtenir un oscillateur de relaxation, on peut reboucler ce montage au moyen d'un circuit intégrateur, illustré ci-contre.

- En notation complexe, on aurait  $\underline{e} = -\frac{1}{jRC\omega} \underline{s}$ , d'où l'équation différentielle :

$$s(t) = -RC \frac{de}{dt}(t),$$

ou  $e(t) = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^t s(u) du + e(t_0)$ . On voit donc que quand le trigger de Schmitt est en saturation haute,  $e(t)$  est une rampe décroissante, donc peut atteindre la valeur de basculement  $-V_{\text{sat}}/2$ , puis le trigger de Schmitt est en saturation basse et  $e(t)$  est une rampe croissante, donc  $e(t)$  recroît jusqu'à  $+V_{\text{sat}}/2$ , et ainsi de suite.

- Compte tenu des similitudes des 2 phases de fonctionnement, leurs durées sont égales et pour la première phase,

$$V_{\text{sat}} = -RC \frac{de}{dt}(t) = -RC \frac{(-\frac{V_{\text{sat}}}{2}) - (\frac{V_{\text{sat}}}{2})}{t_1}, \text{ d'où } t_1 = RC,$$

puis  $\boxed{T = 2RC}$ .

