

Lundi 4/11 : cours de S2I de 8 à 10

Lundi 4/11 : rappels sur les diagrammes potentiel-pH en H201 de 15 à 17

Mardi 5/11 : TP de chimie (conductimétrie)

Pour mercredi 6/11/24 : fin du n°4 feuille 9, n°2 ou 3 feuille 9, n°6 feuille 9

Pb n°1 : Diffusion thermique Le fusible

1°) Conduction thermique : loi de Fourier $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$; T en K, $\|\vec{j}_Q\|$ en W.m^{-2} et λ en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

2°) La température est un scalaire. D'après la symétrie cylindrique du problème, la température ne dépend que de r en coordonnées cylindriques.

Loi de Fourier : $\vec{j}_Q(M) = -\lambda \frac{dT}{dr}(r) \vec{e}_r$. Le vecteur densité de courant thermique est radial.

3°) Par définition de \vec{j}_Q , on a $\phi_{th}(r) = \iint_{\Sigma(r)} \vec{j}_Q(M) \cdot d\vec{S}$ et $\phi_{th}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}(r) 2\pi r L$

4°) La puissance thermique dissipée par effet Joule dans $dV = 2\pi r dr L$ est $\delta P_{th} = \frac{1}{\gamma} j_e^2 2\pi r dr L$.

5°) La transformation subie par le système est isobare donc le premier principe s'écrit $dH = \delta Q$ pendant dt .

- On est en régime permanent donc $dH = 0$ (l'enthalpie ne varie pas pendant dt);
- L'énergie thermique reçue est due :

- à l'effet Joule $\delta Q_J = \delta P_{th} \cdot dt$;
- à la diffusion $\delta Q_{DIF} = [\phi_{th}(r) - \phi_{th}(r + dr)] dt$.

Le bilan thermique s'écrit donc $\delta P_{th} + [\phi_{th}(r) - \phi_{th}(r + dr)] = 0$.

En utilisant un développement de Taylor au premier ordre, on a $\phi_{th}(r + dr) = \phi_{th}(r) + \frac{d\phi_{th}}{dr}(r) dr$ donc le bilan devient $\delta P_{th} - \frac{d\phi_{th}}{dr} dr = 0$.

Avec les expressions obtenues précédemment, il vient : $\frac{1}{\gamma} j_e^2 2\pi r dr L + \lambda 2\pi L \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) dr = 0$.

On en déduit l'équation différentielle : $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{1}{\gamma \lambda} j_e^2 r$.

6°) On peut intégrer en $r \frac{dT}{dr}(r) = -\frac{1}{\gamma \lambda} j_e^2 \frac{r^2}{2}$ puisque $r \frac{dT}{dr} = 0$ en $r = 0$.

On en déduit $\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{1}{\gamma \lambda} j_e^2 \frac{r}{2}$ qui s'intègre en $T(r) - T(R) = -\frac{1}{4\gamma \lambda} j_e^2 (r^2 - R^2)$ que l'on peut écrire

$$T(r) = T(R) + \frac{j_e^2}{4\gamma \lambda} (R^2 - r^2).$$

7°) Comme on a $I = \pi R^2 j_e$ on peut donc écrire $T(r) = T(R) + \frac{1}{4\gamma \lambda} \frac{I^2}{(\pi R^2)^2} (R^2 - r^2)$.

Le flux thermique traversant la surface extérieure est donc : $\phi_{th}(R) = \lambda 2\pi R L \frac{I^2}{4\gamma \lambda (\pi R^2)^2} (2R) = 2\pi R L \frac{I^2}{2\gamma \pi^2 R^3}$

d'après la question 3°).

Ce flux est égal au flux conducto-convectif défini par la loi de Newton : $\phi(R) = h[T(R) - T_0] 2\pi R L$.

On obtient donc

$$T(R) = T_0 + \frac{I^2}{2\gamma h \pi^2 R^3}$$

8°) Pour un conducteur de plomb de rayon $R = 0,25 \text{ mm}$, on trouve $T(R) = 300 + \frac{I^2}{2(4,8 \cdot 10^6) \times 1,3 \times \pi^2 \times (0,25 \cdot 10^{-3})^3}$
c'est-à-dire **820 K** soit 547°C .

Cette température est la plus basse dans le fil puisque, d'après 7°, la température augmente vers le centre du fil. Or elle est bien supérieure à la température de fusion du plomb.

Le conducteur fond donc entièrement.

NB : Les données concernant le cuivre permettent de calculer $T(R) = 69^\circ\text{C}$, qui est donc nettement inférieure à $T_{\text{fus}}(\text{Cu})$.

D'après le 7°), la température de surface augmente si R diminue, pour une intensité fixée.

Il suffit donc de choisir un rayon R tel que la température de surface soit supérieure à la température de fusion pour que le fusible fonde s'il est traversé par l'intensité I .

Pb n°2 : Filtre numérique, exercice 5 de la feuille 8

Voir sur Hugoprepas le programme proposé comme solution.

Pb n°3 : Thermochimie, exercice 4 de la feuille 7

1°) a) On dispose d'un mélange de M_1 mols de C_3H_8 et M_2 mols de C_4H_{10} .
Posons $M = M_1 + M_2$. $d = \frac{m_{\text{mélange}}}{\rho_{\text{air}}} \Rightarrow m_{\text{mélange}} = \rho_{\text{air}} d$.

En adoptant le modèle du gaz parfait (que faire d'autre ici ?), on a :

$$PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \text{ et aussi } M = \frac{\rho RT}{P}$$

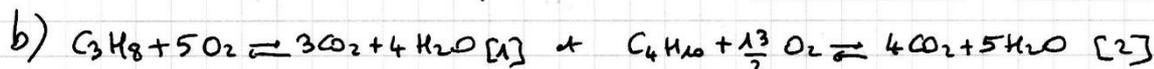
$$\text{Ainsi, on connaît la masse molaire du mélange : } M_{\text{mélange}} = \frac{\rho_{\text{air}} d RT}{P}$$

Or $M_{\text{mélange}}$ est la masse d'une mol de mélange, donc :

$$M M_{\text{mélange}} = M_1 M_{\text{C}_3\text{H}_8} + M_2 M_{\text{C}_4\text{H}_{10}} \text{ . Posons } x_1 = \frac{M_1}{M} \text{ et } x_2 = \frac{M_2}{M} = 1 - x_1$$

$$M_{\text{mélange}} = x_1 (M_{\text{C}_3\text{H}_8} - M_{\text{C}_4\text{H}_{10}}) + M_{\text{C}_4\text{H}_{10}} \quad x_1 = \frac{M_{\text{mélange}} - M_{\text{C}_4\text{H}_{10}}}{M_{\text{C}_3\text{H}_8} - M_{\text{C}_4\text{H}_{10}}}$$

$$M_{\text{C}_3\text{H}_8} = 44 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ et } M_{\text{C}_4\text{H}_{10}} = 58 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \Rightarrow x_1 = 43,1\% \text{ et } x_2 = 56,9\%$$



Un volume V de mélange contient $M = m_1 + m_2$ mols avec $m = \frac{PV}{RT}$

Il lui faut donc $(5m_1 + \frac{13}{2}m_2)$ mols de O_2 , donc $5[5m_1 + \frac{13}{2}m_2]$ mols d'air.

$$\text{soit } 5 \frac{PV}{RT} (5x_1 + \frac{13}{2}(1-x_1)) \text{ mols d'air. D'où } V_{\text{air}} = 5V [5x_1 + \frac{13}{2}(1-x_1)] = 29,3V$$

2^o) a) Le pouvoir calorifique, que l'on notera Q_v (en $\text{kJ}\cdot\text{m}^{-3}$) est la chaleur dégagée par la réaction si on utilise 1m^3 du mélange sous 1 bar à 25°C .
 1m^3 de mélange correspond à $n = \frac{P}{RT}$ mols de mélange

$$D'où \quad Q_v = -x_1 \frac{P}{RT} \Delta H^\circ_1 - x_2 \frac{P}{RT} \Delta H^\circ_2 \quad (\text{signe } \ominus \text{ car on parle de chaleur dégagée})$$

A.N. $Q_v = +96 \cdot 10^6 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$

b) On peut imaginer (H étant fonction d'état) un chemin simple pour les calculs: les 2 réactions ont totales à 298K , donnant du $\text{CO}_2(\text{g})$, du $\text{H}_2\text{O}(\text{g})$ et $\text{N}_2(\text{g})$ à 298K , puis 90% de la chaleur dégagée par les 2 réactions fait passer le mélange gazeux de 298K à T (que l'on cherche)

Pour un volume V de mélange, et un volume V_{air} d'air, l'énergie dégagée sous forme thermique est VQ_v . On applique ensuite le 1^{er} principe aux $(3m_1 + 4m_2)$ mols de CO_2 , $(4m_1 + 5m_2)$ mols de H_2O et $4[5m_1 + \frac{13}{2}m_2]$ mols de N_2 :

$$(3m_1 + 4m_2) \int_{298}^T C_{p,\text{CO}_2}^\circ dT + (4m_1 + 5m_2) \int_{298}^T C_{p,\text{H}_2\text{O}}^\circ dT + (20m_1 + 26m_2) \int_{298}^T C_{p,\text{N}_2}^\circ dT = 0,9 \frac{mRT}{P} Q_v$$

En remplaçant m_1 par $x_1 m$ et m_2 par $x_2 m$, on trouve :

$$T = 2511\text{K}$$

Pb n°4 : Extrait de CCINP PSI 2022 Décantation dans le traitement des eaux

Q14. On isole une particule polluante dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

Les forces sont le poids $\vec{P} = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{e}_z$, la poussée d'Archimède $\vec{\pi}_a = -\rho_e \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{e}_z$, et la force de frottements fluide $\vec{F} = -6\pi\eta r v \vec{e}_z$.

Le théorème de la résultante dynamique, appliqué à la particule polluante, s'écrit :

$$\rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{dv}{dt} \vec{e}_z = (\rho_0 - \rho_e) \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{e}_z - 6\pi\eta r v \vec{e}_z.$$

On projette selon \vec{e}_z :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_0 r^2} v = \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_0}\right) g$$

La vitesse limite correspond au régime établi, c'est-à-dire à la solution particulière de l'équation complète, et cette solution particulière est une constante, puisque le second membre est une constante. Lorsque la dérivée est nulle, la

solution est : $v_\ell = \frac{2\rho_0 r^2 g}{9\eta} \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_0}\right)$.

Puisque $\rho_0 > \rho_e$, on a $v_\ell > 0$.

L'équation différentielle qu'on a trouvée est du premier ordre, et peut se mettre sous la forme canonique :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau_c} = \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_0}\right) g, \text{ avec pour temps caractéristique } \tau_c = \frac{2\rho_0 r^2}{9\eta}.$$

Q15. $\vec{j} = n(z) \vec{v}_\ell$. Donc j s'exprime en $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q16. On rappelle la loi de Fick : $\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}n}$.

Comme j, j_D s'exprime en $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. Et D en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, car n s'exprime en m^{-3} , et $\text{grad}n$ en m^{-4} . Ce courant de diffusion vient du fait que les particules polluantes ont tendance à couler, sous l'action de leur poids et de la poussée d'Archimède (le poids l'emportant), donc la densité volumique de particules polluantes a tendance à être une fonction croissante de z . De cette hétérogénéité de concentration nait un

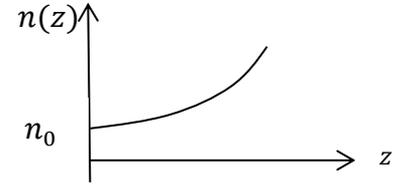
phénomène de diffusion, qui tend à essayer d'homogénéiser n . Ce courant de diffusion est dirigé des hautes concentrations vers les faibles, donc dans le sens des z décroissants.

Q17. Les deux courants se compensent, donc $j + j_D = 0$, d'où $n(z)v_\ell - D \frac{dn}{dz}(z) = 0$.

La solution est $n(z) = A e^{\frac{v_\ell}{D}z}$.

Et la condition aux limites est $n(0) = n_0$, d'où $A = n_0$

Puis $n(z) = n_0 e^{\frac{v_\ell}{D}z}$.



Remarque : on a l'impression que $n(z)$ diverge, mais il ne faut pas oublier que z est borné. En orientant l'axe (Oz) dans l'autre sens, on a une fonction exponentielle décroissante.

Q18. On isole une tranche de largeur a et d'épaisseur b , et de hauteur d_b .

Si la répartition des particules polluées était uniforme (tel que c'était avant le bassin de décantation), on aurait dans la tranche un nombre de particules polluantes : $N = N_0 a b d_b$.

Du fait de la décantation, il devient $N = ab \int_0^{d_b} n(z) dz = ab \int_0^{d_b} n_0 e^{\frac{v_\ell}{D}z} dz = ab n_0 \left[\frac{D}{v_\ell} e^{\frac{v_\ell}{D}z} \right]_0^{d_b}$

Il vient donc $N_0 a b d_b = ab n_0 \frac{D}{v_\ell} (e^{\frac{v_\ell}{D}d_b} - 1)$, puis $N_0 d_b = n_0 \frac{D}{v_\ell} (e^{\frac{v_\ell}{D}d_b} - 1)$.

D'où $n_0 = \frac{N_0 d_b v_\ell}{D (e^{\frac{v_\ell}{D}d_b} - 1)}$.

Q19. Puisque la sédimentation se fait avec une vitesse caractéristique v_ℓ , sur une distance caractéristique d_b , le temps caractéristique de la sédimentation est $\tau_s = \frac{d_b}{v_\ell}$.

Et du fait de la forme de l'équation de la diffusion des particules ($\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}$), le temps caractéristique de la diffusion sur une distance caractéristique d_b est $\tau_D = \frac{d_b^2}{D}$.

Q20. En utilisant les résultats des deux questions précédentes, on peut écrire :

$$n_0 = \frac{N_0 \tau_D}{\tau_s (e^{\frac{\tau_D}{\tau_s}} - 1)}$$

La décantation est bonne quand $n_0 \ll N_0$, donc quand $\frac{\tau_D}{\tau_s (e^{\frac{\tau_D}{\tau_s}} - 1)} \ll 1$. La fonction exponentielle étant très

rapidement croissante, ceci est vérifié pour $\frac{\tau_D}{\tau_s} \gg 1$.