

Pb n°1 : Extraits de CCINP PSI 2024 PhCh (Fort-Boyard)**SANS CALCULATRICE****Partie I - Mégagaf**

Dans cette épreuve, après une démonstration de Mégagaf (V. Lagaffe), un des candidats doit s'élever, à l'aide d'un flyboard, à environ cinq mètres de la surface de l'eau afin d'attraper la clé suspendue dans les airs (figure 1).



Figure 1 - Mégagaf et son flyboard

I. 1 - Présentation du système

Un flyboard est une plateforme sur laquelle les pieds d'un individu sont fixés et qui est composée :

- d'un tuyau de section S_e amenant jusqu'au flyboard de l'eau pompée par un jetski situé plus loin à la surface de l'eau ;
- de deux tuyères de section S_s évacuant l'eau à grande vitesse vers le bas dans l'air extérieur à la pression uniforme P_0 (indépendante de z).

Dans toute la suite, on adopte les notations et la géométrie simplifiée de la figure 2 sur laquelle le tuyau central, beaucoup plus long si on respecte l'échelle, a été tronqué par aspect pratique, mais il fait partie du système.

On ne s'intéresse pas au système de pompage (jetski) et on suppose que l'eau est propulsée depuis la surface de l'eau ($z = 0$) à la vitesse \vec{v}_e et à la pression P_e .

L'eau est considérée comme un fluide parfait homogène incompressible de masse volumique μ .

On note :

- M_{eau} la masse d'eau contenue dans le dispositif flyboard (ensemble des tuyaux);
- $M = M_c + M_{\text{fly}}$ la masse de l'ensemble {candidat + flyboard (sans l'eau qu'il contient)};
- $v_e = \|\vec{v}_e\|$ la vitesse de l'eau à l'entrée du flyboard ;
- $v_s = \|\vec{v}_s\|$ la vitesse de l'eau à la sortie du flyboard.

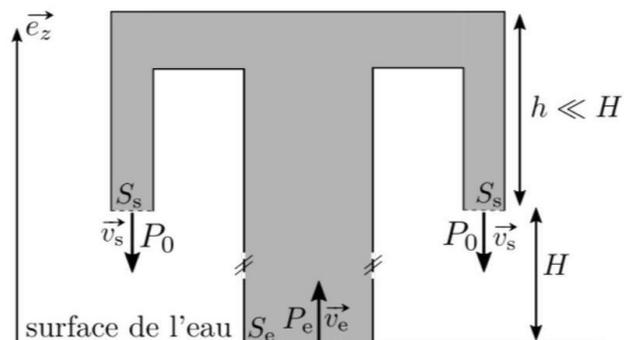


Figure 2 - Schématisation du flyboard

I. 2 - Vitesse d'expulsion nécessaire à l'équilibre

Q1. Peut-on appliquer le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) au système { candidat + flyboard + eau qu'il contient } ? Justifier.

On désire effectuer un bilan de quantité de mouvement pour le système $\Sigma^* = \{\text{eau contenue dans le flyboard}\}$, grisé et délimité par les pointillés dans la figure 2. Pour ce faire, on se place en régime stationnaire et on suppose le candidat en équilibre à l'altitude $H = 5$ m.

Q2. Que signifie concrètement, pour les grandeurs v_e , v_s , S_e et S_s , le fait de se placer en régime stationnaire.

Q3. Définir le système fermé Σ correspondant au système ouvert Σ^* en précisant sa composition à l'instant t et à l'instant $t + dt$.

Q4. Rappeler la définition générale du débit volumique D_v et justifier qu'il se conserve ici le long de l'écoulement. En déduire deux expressions de D_v en fonction de v_e, v_s, S_e et de S_s .

Q5. Effectuer le bilan de quantité de mouvement en projection sur \vec{e}_z .

En notant $F \vec{e}_z$ la force exercée par l'eau sur les parois intérieures du flyboard, montrer que :

$$F = P_e S_e + 2P_0 S_s - M_{\text{eau}} g + \mu D_v^2 \alpha$$

où α est une constante dont on déterminera l'expression en fonction de S_e et de S_s .

Q6. Après avoir vérifié toutes les hypothèses nécessaires, appliquer le théorème de Bernoulli entre deux points à préciser afin d'exprimer P_e en fonction de P_0, μ, g, H, D_v, S_e et de S_s .

Q7. Déduire des trois questions précédentes que :

$$F = P_0(2S_s + S_e) - M_{\text{eau}} g + \mu g H S_e + \mu D_v^2 \beta$$

où β est à expliciter en fonction de S_e et de S_s .

La masse d'eau contenue dans le flyboard se décompose en deux parties :

- première partie : la masse d'eau contenue dans le tube d'alimentation de hauteur H et de section S_e ;
- deuxième partie : la masse d'eau contenue dans les tuyaux de la plateforme, à une distance h sous les pieds du candidat.

Puisque l'on s'intéresse à un vol stationnaire à une altitude de cinq mètres, on a $H \gg h$ et on néglige donc la masse d'eau contenue dans cette deuxième partie.

Q8. Donner l'expression de M_{eau} en fonction de H . En déduire une expression simplifiée de F .

Q9. Appliquer le PFD, toujours en projection sur \vec{e}_z , au système {candidat + flyboard à vide (sans l'eau qu'il contient)} considéré comme étant à l'équilibre à l'altitude H dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Montrer que le débit volumique $D_{v,eq}$ permettant cet équilibre s'écrit :

$$D_{v,eq} = \sqrt{\frac{Mg}{\mu\beta}}$$

Q10. L'application numérique donne $D_{v,eq} = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. En déduire les valeurs numériques de v_e et de v_s à $0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ près, avec $S_e = 80 \text{ cm}^2$ et $S_s = 25 \text{ cm}^2$.

I. 3 - Puissance de la pompe

L'eau de mer est poussée vers le flyboard à travers le tube d'alimentation par la pompe d'un jetski qui pompe de l'eau à la surface de la mer (pression P_0) et l'injecte à la base du tube, lui aussi à la surface de la mer, à la pression $P_e > P_0$.

On néglige les variations d'énergie cinétique, d'énergie interne, et d'énergie potentielle de pesanteur entre l'entrée et la sortie de la pompe.

On cherche à évaluer la puissance minimale de la pompe permettant la pratique du flyboard.

I.3.1 - Non prise en compte des pertes de charge dans le tuyau d'alimentation

Q11. En prenant $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, H = 5,0 \text{ m}, \mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et en reprenant les valeurs de la Q10 pour S_e et S_s , déterminer par un calcul d'ordre de grandeur, la bonne valeur numérique pour $\Delta P = P_e - P_0$ parmi :

$$\Delta P = 0,09 \text{ bar} \quad \Delta P = 0,9 \text{ bar} \quad \Delta P = 9 \text{ bar}.$$

I.3.2 - Prise en compte des pertes de charge dans le tuyau d'alimentation

Le tuyau d'amenée d'eau qui va du jetski au flyboard est cylindrique circulaire. On note ℓ sa longueur et d son diamètre. Pour éviter que le tuyau ne soit tendu et retienne le sportif et pour laisser du mou au conducteur du jetski, la longueur de ce tuyau est très supérieure à la hauteur maximale que peut atteindre le flyboarder. En pratique $\ell = 20 \text{ m}$ et $d = 10 \text{ cm}$.

L'eau, de viscosité dynamique $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ y circule avec le même débit volumique qu'à la Q10, $D_v = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. La rugosité absolue du tuyau, quant à elle, vaut $\varepsilon = 0,05 \text{ mm}$.

On admet que la viscosité de l'eau implique une perte de charge ΔP_c telle que la pression en entrée du tuyau est en fait $P_e + \Delta P_c > P_e$ avec :

$$\Delta P_c = \frac{\mu v_e^a \ell \varepsilon^b}{K d^2} \text{ avec } a, b \in \mathbb{Q} \text{ et } K \text{ un coefficient adimensionné.}$$

Q12. Par analyse dimensionnelle, établir les valeurs numériques de a et de b .

Q13. En admettant que la puissance P_{pompe} fournie par la pompe est égale à la puissance des forces de pressions, exprimer P_{pompe} en fonction de la rehausse de pression totale qu'elle procure $P_e + \Delta P_c - P_0$. On admet que l'application numérique donne $P_{\text{pompe}} = 12 \text{ kW}$.

Commenter la faiblesse de la valeur obtenue sachant que la gamme de puissance recommandée pour le jetski pilotant le flyboard est de $75 \text{ kW} - 125 \text{ kW}$.

Partie II - Milieu marin

Le principal sel neutre dissous dans l'eau de mer est le chlorure de sodium. Il s'agit d'un composé chimique ionique de formule NaCl. Il est notamment un facteur aggravant de la corrosion qui touche toutes les infrastructures construites en bord de mer ou pire, en pleine mer, comme le fort Boyard.

II. 1 - Structure cristallographique du chlorure de sodium

Déjà fait dans le DM1

II. 2 - Enthalpie de dissolution du chlorure de sodium dans l'eau

Expérience 1

On place dans un calorimètre une masse $m_1 = 300 \text{ g}$ d'eau ainsi qu'un thermomètre et un barreau aimanté. L'ensemble est à température ambiante $T_1 = 20^\circ\text{C}$. On ajoute rapidement une quantité $m_2 = 200 \text{ g}$ d'eau à $T_2 = 60^\circ\text{C}$. À l'équilibre, on relève une température $T_3 = 35^\circ\text{C}$.

Expérience 2

On introduit dans le même calorimètre, toujours équipé d'un thermomètre et d'un barreau aimanté, une masse $m_3 = 500 \text{ g}$ d'eau. Le tout est à température ambiante $T_1 = 20^\circ\text{C}$.

Puis on introduit rapidement une masse $m_4 = 50 \text{ g}$ de chlorure de sodium initialement à la température ambiante $T_1 = 20^\circ\text{C}$.

On mesure alors une baisse brutale de température $\Delta T = -1,5^\circ\text{C}$.

On note c_e la capacité calorifique massique de l'eau à pression constante, supposée indépendante de la température. De plus, la capacité calorifique d'une solution sera assimilée à celle de l'eau pure qu'elle contient.

Q19. Exprimer la capacité thermique C du calorimètre équipé de ses accessoires (thermomètre + barreau aimanté) en fonction de c_e, m_1, m_2, T_1, T_2 et de T_3 .

Q20. Exprimer l'enthalpie massique de dissolution de NaCl dans l'eau, notée $\Delta_{\text{diss}} h$, en fonction de c_e, C, m_3, m_4 et de ΔT .

Q21. Quel est l'effet d'une augmentation de température, à pression constante, sur la solubilité du chlorure de sodium dans l'eau pure ? Justifier.

Pb n°2 : Extraits de e3a PSI 2024 PhCh (Fort-Boyard aussi)

Partie I déjà faite dans le DM1

Partie II – Mesure du temps : la clepsydre

Les candidats réalisent des épreuves en durée limitée, mesurée à l'aide d'une clepsydre. Utilisée depuis l'Antiquité, la clepsydre est une horloge reposant sur la vidange d'un récipient contenant de l'eau colorée qui s'écoule à travers un petit orifice sous l'effet de la gravité.

On considère tout d'abord un écoulement d'eau dans un récipient cylindrique, percé d'un orifice en $z = 0$ et placé dans l'air atmosphérique à pression P_0 (voir figure 5, à gauche). On note S la section du cylindre, $s \ll S$ la section de l'orifice, $h(t)$ la hauteur d'eau dans le récipient à l'instant t , ρ la masse volumique de l'eau, \vec{g} l'accélération de la pesanteur, $V(t)$ la vitesse de l'interface eau/air dans le cylindre et $v(t)$ la vitesse de l'eau s'écoulant à travers l'orifice.



Figure 4 – Clepsydre

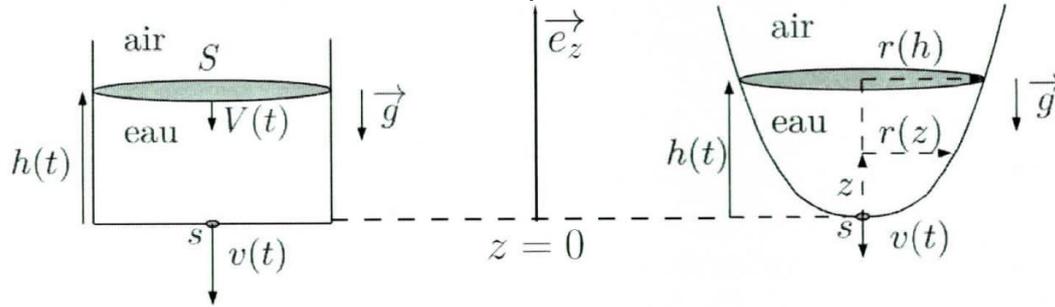


Figure 5 – À gauche : vidange d'un récipient cylindrique. À droite : schéma de la clepsydre

- Q10.** Rappeler la relation de Bernoulli ainsi que ses conditions d'application. On suppose ces conditions remplies dans la suite.
- Q11.** En exploitant l'hypothèse $s \ll S$, établir l'expression de $v(t)$ en fonction de g et de $h(t)$.
- Q12.** L'écoulement étant supposé incompressible, en déduire l'expression de $V(t)$ en fonction de S , s , g et de $h(t)$. Préciser **qualitativement** le sens d'évolution de $V(t)$ lors de la vidange.
- On attend d'une horloge à eau que le niveau d'eau baisse à vitesse constante dans le récipient, malgré la diminution du débit dans le temps. On souhaite adapter la forme du récipient afin de satisfaire cette condition (voir figure 5, à droite). Le profil de la clepsydre, à symétrie de révolution, s'écrit :

$$\forall z > 0, \quad r(z) = K z^{1/n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

- Q13.** En supposant que l'expression de $v(t)$ obtenue à la **question Q11** reste valable, montrer que l'évolution de $h(t)$ est régie par l'équation différentielle :

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{s \sqrt{2g}}{\pi K^2} \frac{\sqrt{h}}{h^{2/n}}. \quad (2)$$

- Q14.** Sans chercher à résoudre cette équation différentielle, déterminer la valeur de l'entier n en imposant que dh/dt ne dépende pas du temps. En déduire l'unité de K .
- Q15.** Trouver la valeur de K permettant d'assurer une vitesse constante $|dh/dt| = 1,0 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

Données pour la partie II

Accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Section de l'orifice : $s = 1,0 \text{ cm}^2$

Partie IV – Utilisation d'un colorant : la fluorescéine

Dans l'épreuve de la caserne, le candidat est amené à décrocher un seau rempli d'eau, courir sur un tapis roulant puis vider le contenu du seau dans un réservoir. À chaque remplissage du réservoir, la clé monte dans un tuyau. Si le candidat parvient à récupérer suffisamment d'eau, il peut attraper la clé. Pour rendre l'épreuve plus visuelle à l'écran, l'eau contient un colorant fluorescent vert, la fluorescéine.

Il est possible de mettre en évidence le phénomène de diffusion de la fluorescéine dans l'eau en microfluidique. Pour estimer quelques ordres de grandeur, on considère tout d'abord un canal microfluidique horizontal de section rectangulaire, de largeur $\ell = 100 \mu\text{m}$ et de hauteur $h = 80 \mu\text{m}$, dans lequel s'écoule de l'eau avec un débit volumique $Q = 10 \mu\text{L} \cdot \text{min}^{-1}$ (voir figure 10, à gauche).

Q26. Calculer numériquement la vitesse débitante (vitesse moyenne) v_m dans le canal, en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Rappeler la définition du nombre de Reynolds \mathcal{R}_e , puis estimer sa valeur pour l'écoulement étudié. Qualifier la nature de l'écoulement.

En microfluidique, le mélange entre deux fluides se fait essentiellement par diffusion : on peut donc mesurer un coefficient de diffusion moléculaire. On utilise pour cela un canal comportant une entrée en Y, permettant l'injection collatérale de deux fluides sur une même largeur et au même débit : d'une part, de l'eau pure et, d'autre part, de l'eau colorée par de la fluorescéine (voir figure 10, à droite). Cette configuration permet de réaliser une diffusion des molécules de fluorescéine dans l'eau pure. L'écoulement étant stationnaire et la section constante, il existe une équivalence entre la position y le long du canal et le temps t .



Figure 10 – À gauche : schéma d'un canal de section rectangulaire. À droite : diffusion de la fluorescéine au confluent de deux canaux microfluidiques

De ce point de vue, on note $C(x, t)$ la concentration volumique de fluorescéine à l'abscisse x et à l'instant t , exprimée en molécules par mètre cube, et D son coefficient de diffusion. L'origine de l'axe Ox est prise au niveau de l'interface entre les deux fluides à l'instant $t = 0$ (voir figure 11). À cet instant, la couche d'eau pure est située dans la zone $x < 0$; la couche d'eau colorée, de concentration volumique C_0 , est dans la zone $x > 0$. On rappelle la loi de Fick, reliant le vecteur densité de courant volumique de molécules de fluorescéine \vec{j} à leur concentration volumique C :

$$\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}} C. \tag{6}$$

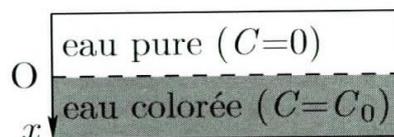


Figure 11 – Schéma de la situation à l'instant $t = 0$

Q27. Établir l'équation de diffusion aux dérivées partielles satisfaite par $C(x, t)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

On admet que la solution de cette équation est de la forme :

$$C(x, t) = A + B \int_0^u e^{-s^2} ds \quad \text{avec} \quad u = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}. \tag{7}$$

Q28. En exploitant les conditions initiales et l'intégrale de Gauss donnée en fin de partie, déterminer les constantes A et B en fonction de C_0 . Que vaut $C(0, t)$ pour $t > 0$?

Q29. Comment relie-t-on simplement y et t ? En utilisant la durée typique t^* du phénomène de diffusion, dont on rappellera l'expression, prévoir l'influence du débit sur la longueur observable de mélange des deux fluides sur la figure 10.

Données pour la partie IV

Intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^0 e^{-s^2} ds = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (8)$$

Propriétés physiques de l'eau :

- Masse volumique : $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Viscosité dynamique : $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Partie VI (déjà commencée dans le DM1) : composition chimique du gong

On propose un protocole expérimental permettant de mesurer le pourcentage massique d'étain du bronze constituant le gong. On plonge un échantillon du gong de masse $m = 3,00 \text{ g}$ dans une solution aqueuse d'acide chlorhydrique ($\text{H}^+_{(\text{aq})}$, $\text{Cl}^-_{(\text{aq})}$), de volume $V = 0,5 \text{ L}$ et de concentration molaire $C = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Un gaz se dégage ; son volume est mesuré grâce à un tube à dégagement introduit dans une éprouvette graduée remplie d'eau.

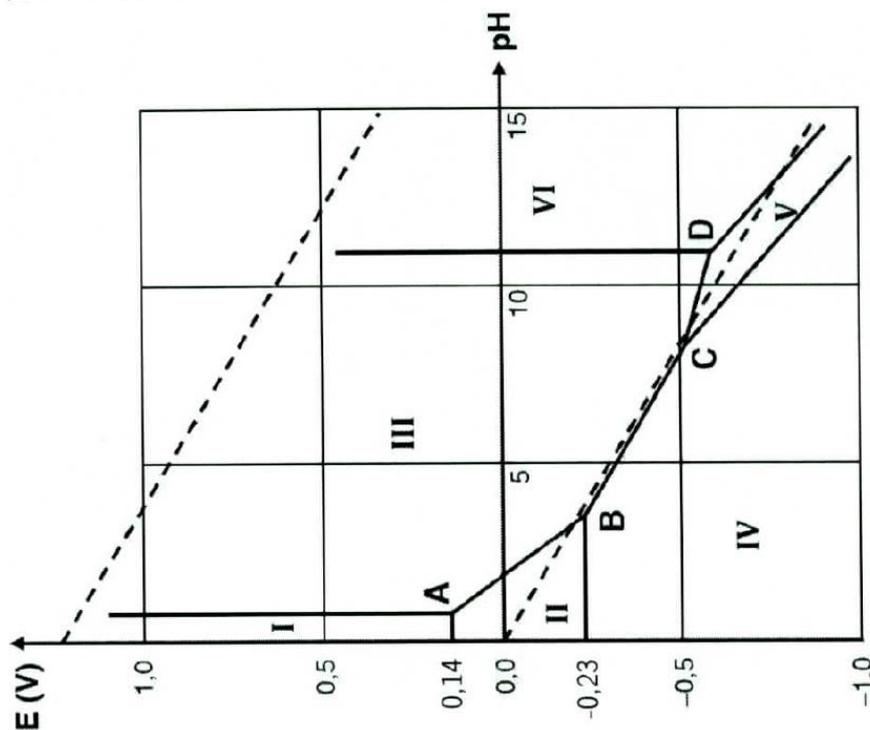
La figure 15 représente le diagramme E -pH de l'étain, tracé à 25°C pour une concentration totale en espèces dissoutes $c_T = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Il fait intervenir les espèces $\text{SnO}_{2(\text{s})}$, $\text{Sn}_{(\text{s})}$, $\text{Sn}^{2+}_{(\text{aq})}$, $\text{Sn}^{4+}_{(\text{aq})}$, $\text{SnO}^{2-}_{3(\text{aq})}$ et $\text{HSnO}^-_{2(\text{aq})}$.

Q38. Calculer le nombre d'oxydation de l'élément Sn dans les différentes espèces, puis attribuer à chacune d'elles son domaine d'existence ou de prédominance indiqué en chiffres romains dans le diagramme E -pH.

Q39. En utilisant le diagramme et la valeur de c_T , estimer la valeur du potentiel standard du couple $\text{Sn}^{2+}_{(\text{aq})}/\text{Sn}_{(\text{s})}$. Comparer à la valeur donnée en fin de partie.

On superpose au diagramme E -pH de l'étain celui de l'eau, en traits pointillés (voir figure 15), tracé à 25°C pour une pression totale en espèces gazeuses $P_T = 1 \text{ bar}$.

Q40. Que peut-on dire des domaines de stabilité de $\text{Sn}_{(\text{s})}$ et $\text{H}_2\text{O}_{(\ell)}$? En déduire l'équation de la réaction qui va se produire si on introduit un morceau d'étain $\text{Sn}_{(\text{s})}$ dans une solution aqueuse très acide et identifier le gaz qui s'en échappe.

Figure 15 – Diagramme E -pH de l'étain

Par un raisonnement équivalent, on admet que l'introduction d'un morceau de cuivre $\text{Cu}_{(s)}$ dans une solution aqueuse très acide ne provoque aucune transformation chimique : le cuivre solide est stable dans l'eau en milieu acide.

Q41. Exprimer le volume molaire V_m d'un gaz supposé parfait en fonction de sa température T et de sa pression P . Calculer numériquement V_m à $T = 293 \text{ K}$ et $P = 1,013 \text{ bar}$.

Q42. En appliquant le protocole proposé, on mesure en fin d'expérience un volume de gaz dégagé $V_f = 153 \text{ mL}$. En détaillant votre raisonnement, déterminer la masse d'étain m_{Sn} dans l'échantillon de bronze étudié, puis son pourcentage massique d'étain w_{Sn} .

Données pour la partie VI

Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Propriétés atomiques :

Élément	Cu	Sn
Rayon métallique (pm)	128	151
Masse molaire ($\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	63,5	118,7

Potentiels standard :

	$\text{Sn}_{(aq)}^{2+}/\text{Sn}_{(s)}$	$\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{(\ell)}$	$\text{H}_{(aq)}^+/\text{H}_{2(g)}$
$E^\circ (\text{V})$	-0,137	1,23	0