Pb n°1 : Extraits de CCINP PSI 2024 PhCh (Fort-Boyard) SANS CALCULATRICE

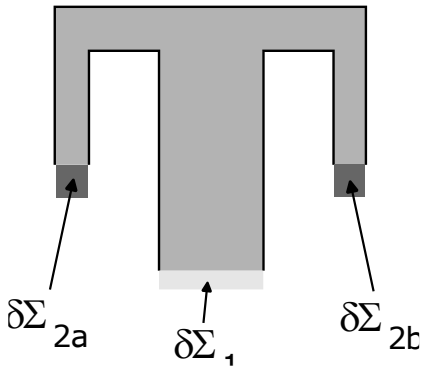
Partie I - Mégagaf

I. 2 - Vitesse d'expulsion nécessaire à l'équilibre

Q1. On ne peut pas appliquer le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) au système { candidat + flyboard + eau qu'il contient }, car c'est un système ouvert. Et le PFD, sous sa forme « classique », n'est valable que pour des systèmes fermés.

Q2. Question un peu bizarre, je ne vois pas en quoi le caractère stationnaire pourrait avoir une influence sur S_e et S_s. Mais bon, obéissons : les grandeurs v_e et v_s (et donc aussi S_e et S_s) sont invariables dans le temps.

Q3. Remarque : la notation de cet énoncé n'est pas la plus répandue, et en tout cas pas celle de mon cours : Σ^* désigne ici un système ouvert.
On note $\delta\Sigma_1$ la petite quantité d'eau qui va entrer dans le « système flyboard » entre t et $t+dt$, et $\delta\Sigma_2$ la petite quantité d'eau qui va en sortir entre t et $t+dt$, qui est constituée de deux sous-parties, $\delta\Sigma_{2a}$ et $\delta\Sigma_{2b}$.
La question n'est pas clairement posée, mais je comprends qu'on veut nous faire définir le système fermé Σ correspondant au système ouvert Σ*et à e qui va entrer ou sortir du système Flyboard entre $t + \mathrm{d}t$:



$$\boxed{\Sigma(t) = \Sigma^*(t) \cup \delta\Sigma_1}$$

$$\boxed{\Sigma(t+dt) = \Sigma^*(t+dt) \cup \delta\Sigma_{2a} \cup \delta\Sigma_{2b}}$$

Q4. Débit volumique : $\boxed{D_v = \iint_{section} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}}$.
Puisque l'eau est supposée incompressible, elle est en écoulement incompressible, donc le champ des vitesses est à flux conservatif, ce qui entraîne la conservation du débit volumique le long de l'écoulement.
On déduit (attention, il y a deux sorties de section) : $\boxed{D_v = v_e S_e = 2 v_s S_s}$.

Q5. Bilan de quantité de mouvement pour le système fermé Σ en projection sur $\overrightarrow{e_z}$.

$$\frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{e_z} = -M_{\text{eau}}\, g - F + P_e S_e + 2P_0 S_s$$

En effet, la force exercée par les parois intérieures sur l'eau est $-F\,\overrightarrow{e_z}$
Et puisque l'écoulement est stationnaire, la quantité de mouvement de est la même à t et à $t+dt$,
d'où $\frac{\vec{p}(t+dt)-\vec{p}(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{e_z} = \frac{2\mu\frac{D_v}{2}\,dt\,\overrightarrow{v_s} - \mu D_v\,dt\,\overrightarrow{v_e}}{dt} \cdot \overrightarrow{e_z} = \mu D_v(\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{v_e}) \cdot \overrightarrow{e_z} = -\mu D_v(v_s + v_e)$.
Après simplification, on obtient $F = P_e S_e + 2P_0 S_s - M_{\text{eau}}\, g + \mu D_v^2 \left(\frac{1}{2S_s} + \frac{1}{S_e}\right)$, ce qui est bien la formule fournie,
avec $\boxed{\alpha = \frac{1}{2S_s} + \frac{1}{S_e}}$.

Q6. Les hypothèses nécessaires pour appliquer le théorème de Bernoulli sont : écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible, les deux points doivent être sur une même ligne de courant, le référentiel doit être galiléen, il ne doit pas y avoir de pièce mécanique mobile ni d'échangeur thermique le long de la ligne de courant..
Et puisque le champ de pesanteur peut être considéré uniforme, on écrit :
$P_e + \frac{1}{2}\mu v_e^2 = P_s + \frac{1}{2}\mu v_s^2 + \mu g H$, d'où $\boxed{P_e = P_0 + \mu g H + \frac{1}{2}\mu\, D_v^2 \left(\frac{1}{4S_s^2} - \frac{1}{S_e^2}\right)}$.

Q7. Des trois questions précédentes, on déduit que :
$F = P_0(2S_s + S_e) - M_{\text{eau}}\, g + \mu g H S_e + \mu D_v^2 \beta$, avec $\boxed{\beta = \frac{S_e^2 + 4S_e S_s + 4S_s^2}{8 S_e S_s^2}}$.

Q8. Donner l'expression de $\boxed{M_{\text{eau}} = \mu H S_e}$.
On en déduit une expression simplifiée de F : $\boxed{F = P_0(2S_s + S_e) + \mu D_v^2 \beta}$.

Q9. Comme demandé, on applique le PFD, toujours en projection sur $\overrightarrow{e_z}$, au système {candidat + flyboard à vide (sans l'eau qu'il contient)} considéré comme étant à l'équilibre à l'altitude H dans le référentiel terrestre supposé galiléen : (attention, $F\,\overrightarrow{e_z}$ est la force de pression, pas de surpression, exercée par l'eau sur les parois intérieures, en présence d'écoulement).

$\vec{0} = M\,\vec{g} + F\,\vec{e_z} - P_0(2S_s + S_e)\,\vec{e_z}$, puis $0 = -Mg + F\ - P_0(2S_s + S_e)$,

d'où $0 = -Mg + \mu D_{v,\mathrm{eq}}^2 \beta$, ce qui donne bien $D_{v,\mathrm{eq}} = \sqrt{\frac{Mg}{\mu\beta}}$.

Remarque : plutôt que d'appliquer deux fois le PFD comme on a été obligé de le faire, il aurait été plus malin de ne l'appliquer qu'une fois, en intégrant le candidat et le Flyboard dans le système fermé Σ).

Q10. $\boxed{v_e = \frac{D_v}{S_e} = \frac{6{,}0\cdot10^{-2}}{80\cdot10^{-4}} = 7{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$ $\boxed{v_s = \frac{D_v}{2S_s} = \frac{6{,}0\cdot10^{-2}}{50\cdot10^{-4}} = 12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

I. 3 - Puissance de la pompe

L'eau de mer est poussée vers le flyboard à travers le tube d'alimentation par la pompe d'un jetski qui pompe de l'eau à la surface de la mer (pression P_0) et l'injecte à la base du tube, lui aussi à la surface de la mer, à la pression $P_\mathrm{e} > P_0$.

On néglige les variations d'énergie cinétique, d'énergie interne, et d'énergie potentielle de pesanteur entre l'entrée et la sortie de la pompe.

On cherche à évaluer la puissance minimale de la pompe permettant la pratique du flyboard.

I.3.1 - Non prise en compte des pertes de charge dans le tuyau d'alimentation

Q11. D'après Q6, $\Delta P = \mu g H + \frac{1}{2}\mu(v_s^2 - v_e^2) = 10^3 \times 10 \times 5 + 500 \times (144 - \frac{225}{4})$, donc la bonne réponse est :

$\Delta P = 0{,}09$ bar $\quad \boxed{\Delta P = 0{,}9\ \mathrm{bar}} \quad \Delta P = 9$ bar.

I.3.2 - Prise en compte des pertes de charge dans le tuyau d'alimentation

Q12. Par analyse dimensionnelle, puisque ΔP_c doit être homogène à μv_e^2, et que $\ell\varepsilon^b$ doit être homogène à d^2, on a : $\boxed{a = 2}$ et $\boxed{b = 1}$.

Q13. La puissance de la pompe est égale au débit volumique que multiplie la variation de l'énergie mécanique volumique : $\boxed{P_{\mathrm{pompe}} = D_v(P_\mathrm{e} + \Delta P_\mathrm{c} - P_0)}$

La faiblesse de la valeur obtenue est due un peu au rendement de la pompe, mais surtout, le moteur du jetski doit aussi servir à propulser ce dernier, avec ses deux passagers.

Partie II - Milieu marin

II. 1 - Structure cristallographique du chlorure de sodium

Déjà fait dans le DM1

II. 2 - Enthalpie de dissolution du chlorure de sodium dans l'eau

Expérience 1

On place dans un calorimètre une masse $m_1 = 300$ g d'eau ainsi qu'un thermomètre et un barreau aimanté. L'ensemble est à température ambiante $T_1 = 20°\mathrm{C}$. On ajoute rapidement une quantité $m_2 = 200$ g d'eau à $T_2 = 60°\mathrm{C}$. À l'équilibre, on relève une température $T_3 = 35°\mathrm{C}$.

Expérience 2

On introduit dans le même calorimètre, toujours équipé d'un thermomètre et d'un barreau aimanté, une masse $m_3 = 500$ g d'eau. Le tout est à température ambiante $T_1 = 20°\mathrm{C}$.

Puis on introduit rapidement une masse $m_4 = 50$ g de chlorure de sodium initialement à la température ambiante $T_1 = 20°\mathrm{C}$.

On mesure alors une baisse brutale de température $\Delta T = -1{,}5°\mathrm{C}$.

On note c_e la capacité calorifique massique de l'eau à pression constante, supposée indépendante de la température. De plus, la capacité calorifique d'une solution sera assimilée à celle de l'eau pure qu'elle contient.

Q19. On applique le premier principe au système formé des masses m_1 et m_2 d'eau et du calorimètre équipé de ses accessoires (thermomètre + barreau aimanté). Puisque ce système évolue de façon adiabatique et isobare, sa variation d'enthalpie est nulle, d'où :

$C(T_3 - T_1) + m_1 c_e(T_3 - T_1) + m_2 c_e(T_3 - T_2) = 0$, d'où $\boxed{C = c_e\,\frac{m_1(T_1 - T_3) + m_2(T_2 - T_3)}{T_3 - T_1}}$.

Q20. On applique le premier principe au système formé des masses m_3 d'eau, m_4 de chlorure de sodium, et du calorimètre équipé de ses accessoires (thermomètre + barreau aimanté). Comme pour la recherche d'une température de flamme, on imagine un chemin fictif au cours duquel il y a d'abord la réaction chimique isotherme, isobare, puis le changement de température isobare : Puisque l'évolution est adiabatique et isobare, la variation d'enthalpie est nulle :

$\Delta_{diss} h \times m_4 + C\Delta T + m_3 c_e \Delta T = 0$.

Il vient $\boxed{\Delta_{diss} h = -\frac{C+m_3 c_e}{m_4}\Delta T}$

Q21. Puisque $\Delta T < 0$, $\Delta_{diss} h > 0$: la réaction est endothermique. Et d'après la loi de Van't Hoff, la constante d'équilibre est fonction croissant de la température.

Ainsi, l'effet d'une augmentation de température, à pression constante, est une augmentation de la solubilité du chlorure de sodium dans l'eau pure, puisqu'une plus grande constante d'équilibre entraine le déplacement de l'équilibre vers la droite (sens direct).

Pb n°2 : Extraits de e3a PSI 2024 PhCh (Fort-Boyard aussi)

Partie I déjà faite dans le DM1

Partie II – Mesure du temps : la clepsydre

Corrigé officiel, publié par e3a (avec mes remarques personnelles en gras) :

10. Pour un écoulement **parfait**, **stationnaire**, **homogène** et **incompressible**, on peut écrire, entre deux points 1 et 2 d'une même ligne de courant,

$$\boxed{P_1 + \frac{\rho {v_1}^2}{2} + \rho g z_1 = P_2 + \frac{\rho {v_2}^2}{2} + \rho g z_2}$$

11. Appliquons la relation de Bernoulli entre un point en amont du récipient, au contact de la surface libre eau/air, et un point au niveau de l'orifice, également à la surface libre eau/air :

$$P_0 + \frac{\rho V^2}{2} + \rho g h = P_0 + \frac{\rho v^2}{2}$$

$$V^2 + 2gh = v^2$$

L'incompressibilité implique la conservation du débit volumique entre les points 1 et 2 : $VS = vs$. Avec l'hypothèse $s \ll S$, il vient $v \gg V$; la relation précédente donne alors

$$\boxed{v(t) = \sqrt{2gh(t)}}$$

12. Par incompressibilité de l'écoulement,

$$\boxed{V(t) = \frac{sv(t)}{S} = \frac{s\sqrt{2gh(t)}}{S}}$$

Au cours de la vidange, $h(t)$ décroît donc $\boldsymbol{V(t)}$ **décroît**.

13. L'incompressibilité de l'écoulement entre l'amont et l'aval de la clepsydre s'écrit

$$VS(h) = vs = \sqrt{2gh}s$$

Or, $V = -\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$ et $S(h) = \pi r^2(h) = \pi K^2 h^{2/n}$. En injectant ces résultats, il vient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{s\sqrt{2g}}{\pi K^2}\frac{\sqrt{h}}{h^{2/n}}}$$

14. D'après l'équation différentielle, la quantité $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$ ne dépend pas du temps à condition que

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{n} = 0$$

soit $\boxed{n = 4}$. D'après l'expression de $r(z)$, K s'exprime alors en $\boxed{\mathrm{m}^{3/4}}$.

15. Dans l'hypothèse précédente, il vient

$$\left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{s\sqrt{2g}}{\pi K^2}$$

Il reste à isoler K :

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{s\sqrt{2g}}{\pi|\mathrm{d}h/\mathrm{d}t|}} = 0,38 \text{ m}^{3/4}}$$

26. La section du canal est $S = \ell h$. La vitesse débitante vaut donc

$$\boxed{v_\mathrm{m} = \frac{Q}{S} = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}}$$

Par définition du nombre de Reynolds,

$$\boxed{\mathcal{R}e = \frac{\rho v_\mathrm{m} L}{\eta}}$$

avec L une taille caractéristique de l'écoulement. Pour L, on choisit généralement la plus petite taille entre ℓ et h bien qu'ici, elles soient du même ordre de grandeur. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{R}e = \frac{\rho v_\mathrm{m} h}{\eta} \simeq 2}$$

Puisque $\mathcal{R}e \ll 2 \cdot 10^3$, **l'écoulement est laminaire**.

Remarque : je ne suis pas d'accord avec ce corrigé officiel, ce n'est pas toujours la plus petite taille qu'il faut choisir comme longueur caractéristique, par exemple pour une aile d'avion, on prend la corde, et non l'épaisseur de l'aile … mais ici, ça ne change pas grand-chose. Et physiquement, c'est bien la hauteur qui est la distance caractéristique de la compétition diffusion/convection.

27. On considère une tranche liquide élémentaire de volume $S\mathrm{d}x$. On réalise un bilan de molécules de fluorescéine sur ce système entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$:

$$[C(x, t + \mathrm{d}t) - C(x, t)]S\mathrm{d}x = j(x, t)S\mathrm{d}t - j(x + \mathrm{d}x, t)S\mathrm{d}t$$

En faisant tendre $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$ vers 0, on obtient, après simplification par $S\mathrm{d}x\mathrm{d}t$,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

En injectant la loi de Fick $j = -D\partial C/\partial x$, il vient

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}$$

Remarque : énoncé très mal rédigé : y ne peut pas dépendre du temps, puisqu'on est en description eulérienne, donc les variables y et t sont indépendantes. Et en plus, ici, l'écoulement est stationnaire, donc aucun champ ne dépend du temps.

28. Les conditions initiales imposent $C(x>0,0)=C_0$ et $C(x<0,0)=0$, conduisant aux relations

$$A+B\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s=C_0 \qquad \text{et} \qquad A+B\int_0^{-\infty}\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s=0$$

Avec le formulaire,

$$A+B\frac{\sqrt{\pi}}{2}=C_0 \qquad \text{et} \qquad A-B\frac{\sqrt{\pi}}{2}=0$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$\boxed{A=\frac{C_0}{2} \qquad \text{et} \qquad B=\frac{C_0}{\sqrt{\pi}}}$$

On en déduit, en $x=0$ et pour $t>0$,

$$\boxed{C(0,t)=\frac{C_0}{2}+\frac{C_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^0\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s=\frac{C_0}{2}}$$

29. L'écoulement étant stationnaire, $\boxed{y=v_\mathrm{m}t}$. Notons t^* l'instant pour lequel les particules ont diffusé sur toute la largeur ℓ du canal. Par la loi d'échelle du processus de diffusion, $\boxed{t^*\simeq\ell^2/D}$. Avec la relation d'équivalence entre y et t, on en déduit la longueur de mélange y^* dans le canal :

$$y^*=v_\mathrm{m}t^*=\frac{v_\mathrm{m}\ell^2}{D}$$

Augmenter le débit revient à augmenter v_m, ce qui conduit à **augmenter la longueur de mélange**.

Remarque : énoncé faux, y ne peut pas dépendre du temps. Il aurait fallu écrire est que C est une fonction$C(x,y)$, le régime étant stationnaire. Et l'influence de y sur la fonction C est la même que celle qu'aurait le temps t s'il n'y avait pas d'écoulement, le régime étant alors non stationnaire, du fait de la diffusion.
Pour obéir à l'énoncé, au concours, j'aurais écrit $y=v_mt$ mais j'aurais rouspété,

et ensuite j'aurais écrit $t^*=\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{D}$, car pour moi, la diffusion se fait verticalement ici.

J'aurais donc trouvé $y^*=\frac{v_mh^2}{4D}=\frac{Qh}{4\ell D}$

38. Le plus souvent, NO(O)$=-2$ et NO(H)$=+1$. On utilise ces nombres d'oxydation et le fait que la somme des NO des éléments est égale à la charge de chaque espèce, pour en déduire le NO de l'élément Sn dans les différentes espèces :

Espèce	$SnO_{2(s)}$	$Sn_{(s)}$	$Sn^{2+}_{(aq)}$	$Sn^{4+}_{(aq)}$	$SnO^{2-}_{3(aq)}$	$HSnO^{-}_{2(aq)}$
NO(Sn)	$+4$	0	$+2$	$+4$	$+4$	$+2$

On classe les espèces par NO(Sn) croissant, de bas en haut dans le diagramme E-pH. Par ailleurs, on écrit les réactions acido-basiques entre espèces ayant le même NO(Sn). Pour NO(Sn)$=2$,

$$Sn^{2+}_{(aq)}+3\,HO^{-}_{(aq)}=HSnO^{-}_{2(aq)}+H_2O_{(\ell)}$$

Ainsi, $HSnO^{-}_{2(aq)}$ est « plus basique » que $Sn^{2+}_{(aq)}$. De même pour NO(Sn)$=4$,

$$Sn^{4+}_{(aq)}+4\,HO^{-}_{(aq)}=SnO_{2(s)}+2\,H_2O_{(\ell)} \qquad SnO_{2(s)}+2\,HO^{-}_{(aq)}=SnO^{2-}_{3(aq)}+H_2O_{(\ell)}$$

Ainsi, $SnO^{2-}_{3(aq)}$ est « plus basique » que $SnO_{2(s)}$, lui-même étant « plus basique » que $Sn^{4+}_{(aq)}$. On en déduit finalement les domaines d'existence/prédominance correspondants :

Espèce	$SnO_{2(s)}$	$Sn_{(s)}$	$Sn^{2+}_{(aq)}$	$Sn^{4+}_{(aq)}$	$SnO^{2-}_{3(aq)}$	$HSnO^{-}_{2(aq)}$
Domaine	III	IV	II	I	VI	V

39. Écrivons la demi-équation électronique du couple $Sn^{2+}_{(aq)}/Sn_{(s)}$:

$$Sn^{2+}_{(aq)} + 2\,e^- = Sn_{(s)}$$

La relation de Nernst s'écrit, à $T = 298$ K,

$$E_{Sn^{2+}/Sn} = E^\circ_{Sn^{2+}/Sn} + \frac{0,06}{2}\log[Sn^{2+}]$$

À la frontière, $[Sn^{2+}] = c_T$ et on lit sur le diagramme $E_{Sn^{2+}/Sn} = -0,23$ V. On en déduit

$$\boxed{E^\circ_{Sn^{2+}/Sn} = -0,23 - 0,03\log(c_T) = -0,14 \text{ V}}$$

Cette valeur est en accord avec la valeur tabulée.

40. On note que les domaines de stabilité de $Sn_{(s)}$ et $H_2O_{(\ell)}$ sont **disjoints** : ces deux espèces ne peuvent donc pas coexister et vont réagir ensemble. L'étain solide étant réducteur, il va réagir avec l'eau en tant qu'oxydant du couple $H^+_{(aq)}/H_{2(g)}$, selon l'équation de réaction équilibrée en milieu acide

$$\boxed{Sn_{(s)} + 2\,H^+_{(aq)} = Sn^{2+}_{(aq)} + H_{2(g)}}$$

Le gaz dégagé quand on plonge l'échantillon d'étain est du **dihydrogène**.

41. L'équation d'état des gaz parfaits s'écrit $PV = nRT$; ainsi,

$$\boxed{V_m = \frac{V}{n} = \frac{RT}{P}}$$

À $T = 293$ K et $P = 1,013$ bar, on trouve $\underline{V_m = 24,0 \text{ L.mol}^{-1}}$.

42. En plongeant l'échantillon de gong dans la solution aqueuse d'acide chlorhydrique, l'étain contenu dans le bronze réagit selon l'équation écrite à la question **40**. Posons un bilan de quantité de matière :

Quantités de matière (mol)	$Sn_{(s)}$	$+\ 2\,H^+_{(aq)}$	$= Sn^{2+}_{(aq)}$	$+\ H_{2(g)}$
État initial ($\xi = 0$)	n_0	CV	0	0
État final (ξ_f)	$n_0 - \xi_f$	$CV - 2\xi_f$	ξ_f	ξ_f

La quantité de matière initiale d'ions H^+ vaut $CV = 5 \cdot 10^{-2}$ mol. La quantité de matière finale de dihydrogène dégagé vaut

$$\xi_f = \frac{V_f}{V_m} = 6,38 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

En supposant la réaction totale, le fait que $CV - 2\xi_f > 0$ implique que le réactif limitant est l'étain. On en déduit la quantité d'étain contenue dans l'échantillon de bronze : $n_0 = \xi_f = 6,38 \cdot 10^{-3}$ mol. La masse d'étain dans le bronze étudié est donc

$$\boxed{m_{Sn} = n_0 M_{Sn} = 0,757 \text{ g}}$$

Le pourcentage d'étain dans le bronze est donc

$$\boxed{w_{Sn} = \frac{m_{Sn}}{m} = 25,2\,\%}$$