Variables aléatoires
DM 11

Exercice 1 :

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note p un réel de $]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On dispose d'une pièce donnant 'Pile' avec la probabilité p et 'Face' avec la probabilité q.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- Si l'on a obtenu 'Pile'.
- Si l'on a obtenu n fois 'Face'.

Pour tout entier naturel k non nul, on pose les événements

- P_k : « on a obtenu 'Pile' au k^{ieme} lancer ».
- F_k : « on a obtenu 'Face' au k^{ieme} lancer ».

On pose enfin les variables aléatoires suivantes :

- T_n le nombre de lancers effectués avant l'arrêt (lancer ayant provoqué l'arrêt y compris),
- X_n le nombre de 'Pile' obtenus jusqu'à l'arrêt (arrêt y compris)
- Y_n le nombre de 'Face' obtenus.

On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé (Ω, P) que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n :
   a) Déterminez $T_n(\Omega)$.
   b) Calculez $P(T_n = 1)$.
   c) Pour tout k de $[\![2, n-1]\!]$, exprimez l'événement $(T_n = k)$ en fonction des événements P_k et F_k et calculez $P(T_n = k)$.
   d) Ecrire $(T_n = n)$ sous la forme d'union et intersection (il y a les deux ! [a]) des événements P_k et F_k et calculez $P(T_n = n)$.
   e) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.
   f) Question difficile (l'admettre si bloqué) : vérifier que l'espérance de T_n est $\dfrac{1-q^n}{1-q}$.
2. Loi de X_n.
   a) Donner la loi de X_n.
   b) Déterminer l'espérance de X_n.
3. Loi de Y_n.
   a) Déterminer, pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, $P(Y_n = k)$.
   b) Déterminer $P(Y_n = n)$.
   c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n.
   d) Calculez $E(Y_n)$.

a. cette indication ne sera pas donnée lors du prochain DS...

1. a) Il y a au plus n lancers et au minimum 1 (si on a obtenu pile dès le début), et tous les autres nombres de lancers sont possible. Ainsi $\boxed{T_n(\Omega) = [\![1; n]\!]}$.

   b) L'événement $(T = 1)$ est simplement l'évenement P_1.
   Ainsi, $\boxed{P(T = 1) = p.}$

   c) Pour $k \in [\![[2, n-1]$, $(T = k)$ signifie qu'on a obtenu $k - 1$ face, puis pile, c'est à dire

   $$(T = k) = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{k-1} \cap P_k$$

   donc par la formule des probabilités composées, on a

   $$P(T = k) = P(F_1)P_{F_1}(F_2) \ldots\ldots P_{\cap_{i=1}^{k-2} F_i}(F_{k-1})P_{\cap_{i=1}^{k-1} F_i}(P_k)$$

   En utilisant le fait que la probabilité d'avoir face ne change pas (et non par indépendance puisque si on a P_1, alors on n'a pas F_2, donc les événements sont non indépendants...), on a

   $$\boxed{P(T = k) = (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p}$$

   d) $(T_n = n)$ regroupe deux situations : on a eu que des faces pendant les n lancers, ou alors on a eu $n - 1$ faces et le dernier est un pile.
   Ainsi, $(T_n = n) = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap (F_n \cup P_n)$. Le dernier événement de cet intersection de probabilité 1 sachant les précédents, et donc on a, à nouveau par les probabilités composées :

   $$\boxed{P(T_n = n) = q^{n-1}}$$

e) C'est une vérification, en utilisant le fait que $p = 1 - q$ pour la simplification à la fin :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) &= \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}p + q^{n-1} = p\sum_{k=0}^{n-2} q^k + q^{n-1} \\ &= (1-q)\frac{1-q^{n-1}}{1-q} + q^{n-1} \\ &= 1 - q^{n-1} + q^{n-1} = 1\end{aligned}$$

f) Remarquons déjà que la formule obtenue à la question c convient aussi pour $k = 1$, puisqu'alors $q^{k-1} = 0$.
Ainsi, $E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}p + nq^{n-1}$
Or, en posant $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$, on a $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ et donc

$$E(T_n) = pf'(q) + nq^{n-1}$$

Comme $f(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$, on en déduit $f'(x) = \dfrac{-nx^{n-1}(1-x) + (1-x^n)}{(1-x)^2}$.
En remplaçant p par $1-q$, on a une simplification immédiate qui permet d'avancer vite dans le calcul :
Et donc

$$\begin{aligned}E(T_n) &= \frac{-nq^{n-1}(1-q) + (1-q^n)}{1-q} + nq^{n-1} \\ &= \frac{-nq^{n-1}(1-q) + (1-q^n) + nq^{n-1}(1-q)}{1-q} \\ &= \frac{1-q^n}{1-q}\end{aligned}$$

2. a) X_n est le nombre de pile obtenus, donc il n'y a que deux valeurs possibles 0 ou 1.
Ainsi, X_n suit une loi de Bernoulli.
Comme $(X_n = 0) = F_1 \cap F_2 \ldots \cap F_n$ on a, via la formule des probabilités composées, $P(X_n = 0) = q^n$, d'où $P(X_n = 1) = 1 - q^n$ et finalement

$$\boxed{X_n \sim \mathcal{B}(1 - q^n)}$$

b) C'est une loi de Bernoulli, donc l'espérance égale le paramètre, c'est à dire

$$\boxed{E(X_n) = 1 - q^n}$$

3. a) Pour $k < n$, on a obtenu k faces en tout si on a eu k fois face, puis un pile, c'est à dire : $(Y_n = k) = F_1 \cap F_2 \ldots \cap F_k \cap P_{k+1}$ d'où, toujours via les probas composées :

$$\boxed{P(Y_n = k) = q^k p}$$

b) De même que précédemment, l'évenement $(Y_n = n)$ étant simplement $F_1 \cap F_2 \ldots \cap F_n$, on obtient

$$\boxed{P(Y_n = n) = q^n}$$

c) Le nombre total de lancers est le nombre de face, auquel on ajoute le lancer qui a donné pile, dans le cas où un pile interrompt la série, ou alors c'est la situation où on a eu n faces et 0 pile. Dans tous les cas, $\boxed{T_n = X_n + Y_n}$.

d) Par linéarité de l'espérance $E(Y_n) = E(T_n) - E(X_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q} - (1 - q^n)$
En mettant au même dénominateur, il vient enfin :

$$\boxed{E(X) = q\frac{1-q^n}{1-q}}$$