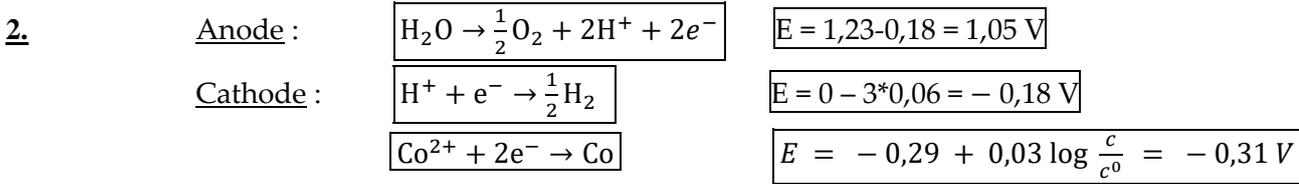


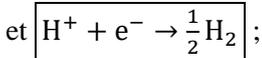
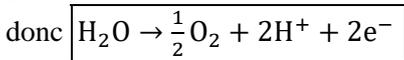
Problème n°1 : METALLURGIE DU COBALT e3a PSI 2008 et polluant azoté cinétique e3a PSI 2016

1. Schéma classique : la borne + est, pour une électrolyse, l'anode, ici en graphite ; la cathode est la borne -, ici en aluminium. Comme toujours, le courant descendant dans l'anode est positif ; ce courant remonte donc par la cathode. Le sens du courant est imposé par la source de tension qui est placée entre les deux électrodes.



En effet, la masse molaire effective du sulfate de cobalt (ici hydraté) est $M_{\text{CoSO}_4,7\text{H}_2\text{O}} = 58,9 + 32,1 + 16 \cdot 7 + 14 = 281 \text{ g/mol}$.
 Donc 50 g/L représente $c = 50/281 = 0,18 \text{ mol/L}$ de Co^{2+} et $\log(0,18) = -0,74$.

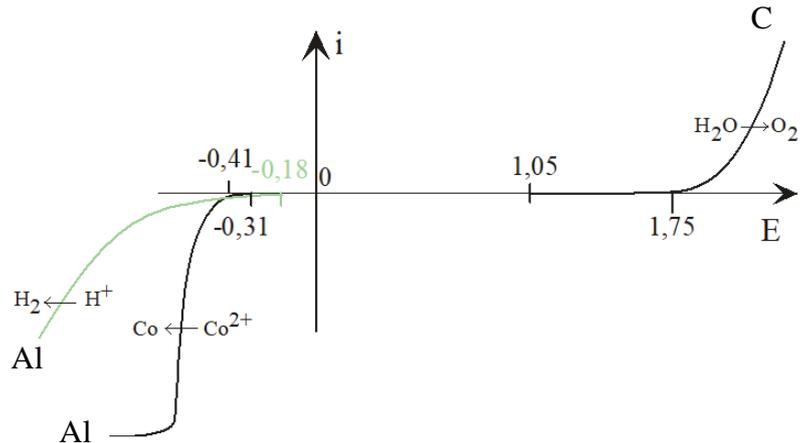
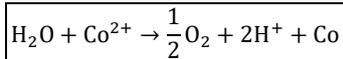
3. Du point de vue thermodynamique, les plus favorisées sont celles les moins éloignées en potentiel de Nernst,



il faudrait donc $\boxed{V_A - V_C \geq 1,23 \text{ V}}$.

4. Voir courbe ci-contre.

5. Compte tenu des formes des courbes, sur la cathode c'est la réduction des ions du cobalt qui a lieu, d'où le bilan :



6. Du fait des surpotentiels au démarrage et de la chute de tension ohmique, $\boxed{V_A - V_C \geq 3,26 \text{ V}}$

car $1,05 + 0,7 - (-0,31 - 0,1) + 1,1$

7. Pour un avancement $d\xi$ de la réaction globale, le nombre de moles d'électrons échangés est $2d\xi$, donc la charge qui circule est $2\mathcal{F}d\xi$, et le courant $i = 2\mathcal{F}d\xi/dt$.

La masse de Co produite pendant dt est $\delta m = M_{\text{Co}}d\xi$, d'où $\boxed{\delta m = \frac{M_{\text{Co}}i}{2\mathcal{F}} dt}$.

Ainsi, sur 1 jour, si tout le courant est utile, la masse de Co attendue est $\boxed{m_{\text{attendu}} = 264 \text{ kg}}$.

8. Le rendement faradique ρ_f est le rapport du courant utile au courant total : $\rho_f = \frac{i_{\text{utile}}}{i_{\text{total}}}$, en appelant courant utile celui correspondant uniquement à la demi-réaction de réduction des ions du cobalt.

Du fait que $\delta m_{\text{attendu}} = \frac{M_{\text{Co}}i_{\text{total}}}{2\mathcal{F}} dt$ et $\delta m_{\text{réel}} = \frac{M_{\text{Co}}i_{\text{utile}}}{2\mathcal{F}} dt$, Il vient $\boxed{\rho_f = \frac{m_{\text{réel}}}{m_{\text{attendu}}} = \frac{256}{264} = 97\%}$.

Du fait du croisement des 2 courbes intensité-potentiel cathodiques, lorsque le courant cathodique de réduction de Co^{2+} est important, la cathode se trouve à un potentiel pour lequel il y a aussi un peu de courant cathodique de réduction des H^+ .

9. L'énergie massique fournie à l'électrolyseur est égale à :

$$\frac{W}{m_{\text{réel}}} = \frac{i_{\text{total}} \cdot U \cdot t}{\rho_f m_{\text{attendu}}} = \frac{2 \cdot \mathcal{F} \cdot U}{\rho_f M_{\text{Co}}} \approx 11 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Problème n°2 : gravitation

Centrale MP 2018

I. Champ gravitationnel et champ de pesanteur terrestre

Q1- Les forces électrostatique et de gravitation s'écrivent respectivement

$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{M_1 M_2^3}$ et $\vec{F}_{m_1 \rightarrow m_2} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{M_1 M_2^3}$, d'où l'analogie $\boxed{q_i \leftrightarrow m_i, \quad \frac{1}{\epsilon_0} \leftrightarrow -4\pi G, \quad \vec{E} \leftrightarrow \vec{G}}$

Enoncé du théorème de Gauss gravitationnel : le flux du champ gravitationnel à travers toute surface fermée est égal à la masse intérieure au volume délimité par la surface multipliée par $-4\pi G$.

$$\oiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$$

Q2- Pour tout point M , les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétries pour la distribution de masse, donc $\vec{g}_T(M)$ est contenu dans ces deux plans, d'où $\vec{g}_T(M) = g_T(M)\vec{e}_r = g_T(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r$.

Q3- La distribution de masse est invariante par toute rotation autour de O , donc g_T ne dépend pas de θ ni φ , g_T ne dépend que de r et $\vec{g}_T = g_T(r)\vec{e}_r$.

Q4- L'application du théorème de Gauss à une sphère de centre C et de rayon $R > R_T$ conduit à $\vec{g}_T = -\frac{GM_T}{r^2}\vec{e}_r$, or $r = R_T + z$ donc $\vec{g}_T = -\frac{GM_T}{(R_T+z)^2}\vec{e}_r$.

Q5- L'intensité du champ vaut $g_T(z) = \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2}$,

ce qui donne bien, avec un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{z}{R_T}$, $g_T(z) \simeq \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{z}{R_T}\right)$ avec $\left|\frac{z}{R_T}\right| \ll 1$.

Q6- En notant z_0 l'altitude recherchée, on veut $\left|\frac{g_T(0) - g_T(z_0)}{g_T(0)}\right| = 0,01$ soit $z_0 = \frac{1}{2}0,01R_T$. On trouve numériquement $z_0 = 31,8 \text{ km}$.

Q7- Pour $0 < z \ll R_T$, $\overrightarrow{grad} g_T = \frac{d}{dz} \left(\frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{z}{R_T}\right) \right) \vec{e}_z = -2\frac{GM_T}{R_T^3} \vec{e}_z$.

Le vecteur $\overrightarrow{grad} g_T$ indique la direction et le sens du déplacement pour la plus grande augmentation de g_T . On retrouve qu'il faut se déplacer vers le centre de la sphère pour voir $g(z)$ augmenter le plus.

Q8- On a $2\frac{GM_T}{R_T^3} = 3,08 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$. Or $1 \text{ gal. cm}^{-1} = 1,00 \text{ s}^{-2}$, donc $1 \mu\text{gal. cm}^{-1} = 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$.

On en déduit $\frac{dg_T}{dz} = -3,08 \mu\text{gal. cm}^{-1}$.

Les valeurs de z_0 et de $2\frac{GM_T}{R_T^3}$ montrent qu'une variation de l'altitude z influe très peu sur la valeur du champ gravitationnel.

II Applications de la gravimétrie

Q9- Les invariances et symétries pour une distribution de masse à symétrie sphérique conduisent, comme dans le I à $\vec{g}_B = g_B(r)\vec{e}_r$ (même s'il y a deux masses volumiques différentes, le problème reste à symétrie élevée donc il n'est pas nécessaire d'utiliser le théorème de superposition).

Par application du théorème de Gauss avec pour surface de Gauss une sphère de centre O' (centre de la boule) et rayon $r = O'M$, on obtient : $\oiint_S \vec{g}_B(M) \cdot d\vec{S} = \iint_S g_B(r)\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dS = g_B(r) \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G m_{int}$.

Le point M étant à l'extérieur de la boule, $m_{int} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu' = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu_m + \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta\mu$,

d'où $\vec{g}_B(M) = -\frac{4}{3}\pi \frac{GR^3}{r^2} (\mu_m + \Delta\mu)\vec{e}_r$.

Q10- Puisque l'axe (Oz) est maintenant vers le bas, $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = -\cos\theta$, on obtient donc

$g_{Bz} = \vec{g}_B \cdot \vec{e}_z = \frac{4\pi G}{3r^2} R^3 (\mu') \cos\theta$. Et, de même, $g_{Bz0} = \vec{g}_{B0} \cdot \vec{e}_z = \frac{4\pi G}{3r^2} R^3 (\mu_m) \cos\theta$

Q11- On calcule l'anomalie gravimétrique : $\Delta g = g_{Bz} - g_{Bz0}$:

Il vient $\Delta g = \frac{4}{3}\pi \frac{G}{r^2} (R^3 \Delta\mu) \cos\theta$.

En comparant à l'expression obtenue à la question Q10, on voit qu'en effet, l'anomalie gravimétrique Δg correspond bien au champ de pesanteur g'_z créé par une boule de masse volumique $\Delta\mu$, puisque la formule donnant Δg est celle donnant g_{Bz} , à condition de remplacer μ' par $\Delta\mu$.

Q12- Puisque $\cos \theta = \frac{h}{r}$, $\Delta g = \frac{4}{3} \pi \frac{Gh}{r^3} (R^3 \Delta \mu)$. Et puisque $r = (x^2 + h^2)^{1/2}$, $r^3 = (x^2 + h^2)^{3/2}$.

On a donc bien $\Delta g = \frac{4\pi G R^3 \Delta \mu h}{3(x^2 + h^2)^{3/2}}$.

Q13- L'allure de la courbe de la fonction $\Delta g(x)$ est donnée ci-contre, pour h_1 et pour $h_2 > h_1$. La fonction est paire, et fonction décroissante de $|x|$.

Q14- Commençons par la valeur maximale, obtenue pour $x = 0$ d'après la question précédente :

$$\Delta g_{max} = \frac{4\pi G R^3 \Delta \mu}{3h^2}$$

Largeur à mi-hauteur : On cherche x tel que :

$$\frac{4\pi G R^3 \Delta \mu h}{3(x^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{4\pi G R^3 \Delta \mu}{6h^2}, \text{ c'est-à-dire } (x^2 + h^2)^{3/2} = 2h^3,$$

d'où $x^2 + h^2 = 2^{2/3} h^2$, puis $x^2 = (\sqrt[3]{2} - 1)h^2$, et enfin

$$|x| = h\sqrt{\sqrt[3]{2} - 1}. \text{ La largeur à mi-hauteur de la courbe est donc } \Delta x = 2h\sqrt{\sqrt[3]{2} - 1}.$$

Q15- Sur la figure 8, on peut lire $\Delta x = 120\text{m}$, d'où $h = 78\text{ m}$.

Puis, en lisant $\Delta g_{max} = 0,28\text{ mgal}$, on obtient $R = \sqrt[3]{\frac{3h^2 \Delta g_{max}}{4\pi G \Delta \mu}} = 39\text{ m}$,

puisque $1\text{ mgal} = 10^{-3}\text{ cm} \cdot \text{s}^{-2} = 10^{-5}\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Q16- En vertu des questions précédentes, on sait à présent calculer l'anomalie gravitationnelle due à une sphère homogène placée dans une grosse sphère d'un autre milieu homogène.

On dispose à présent d'une grotte (boule creuse remplie d'air, assimilable à du vide, d'un point de vue masse volumique (celle de l'air est très petite devant celle de la Terre), et d'une boule d'or homogène. On va essayer de se ramener à une ou plusieurs configuration(s) analogue(s) à la précédente.

On commence donc par choisir de confondre le centre de la boule d'or avec celui de la grotte, pour obtenir une symétrie sphérique de distribution de masse pour l'ensemble {or+grotte}.

La distribution de masse est donc : une boule d'or de rayon R_1 , dont le centre est à une profondeur h , placée au centre d'une grotte sphérique, de rayon R_2 , dont le centre est aussi à la profondeur h , et un milieu homogène de masse volumique uniforme μ_m dans le reste de la Terre. Cette distribution de masse peut s'obtenir en superposant :

- La Terre, grosse sphère de milieu homogène de masse volumique μ_m ;
- Une boule homogène de rayon R_2 (pour faire la grotte), avec une masse volumique nulle, c'est-à-dire présentant un écart de masse volumique $\Delta \mu_2 = -\mu_m$ par rapport à la Terre ;
- Une grosse boule d'air, assimilé à du vide, de masse volumique nulle ;
- Une boule homogène de rayon $R_1 < R_2$ (pour le trésor), avec la masse volumique μ_{or} , c'est-à-dire présentant un écart de masse volumique $\Delta \mu_1 = +\mu_{or}$ par rapport à la sphère d'air.

Le premier couple (Terre + boule R_2) crée une anomalie gravitationnelle $\Delta g_2 = \frac{4\pi G h R_2^3 (-\mu_m)}{3(x^2 + h^2)^{3/2}}$.

Le second couple (Air + boule R_1) crée une anomalie gravitationnelle $\Delta g_1 = \frac{4\pi G h R_1^3 (\mu_{or})}{3(x^2 + h^2)^{3/2}}$.

Pour que cela ne soit pas détectable, il faut que l'anomalie soit nulle, d'où $R_2^3 \mu_m = R_1^3 \mu_{or}$.

Q17- On cherche la masse d'or qu'on peut cacher, donc en pratique, on cherche le rayon R_1 . La formule précédente donne $R_1 = R_2 \left(\frac{\mu_m}{\mu_{or}}\right)^{1/3}$.

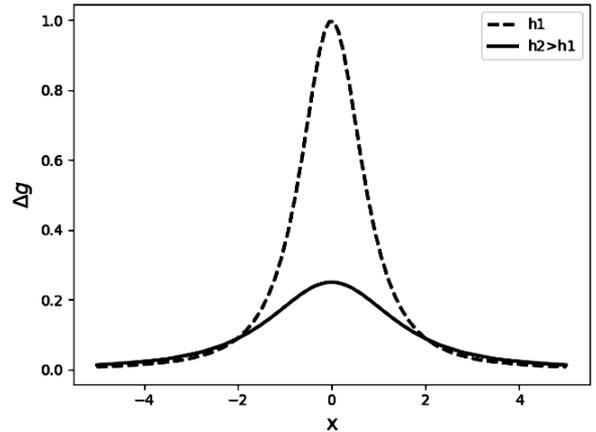
Pour l'application numérique, on doit se donner une valeur pour μ_m , masse volumique moyenne de la Terre. Une première façon de l'évaluer est de diviser la masse de la Terre par son volume :

$$\mu_{m1} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Ceci conduit à une première valeur de R_1 : $R_{11} = 0,66\text{ m}$.

Et la masse d'or associée est $m_{11} = \frac{4}{3}\pi R_{11}^3 = 23\text{ tonnes}$. Pas mal !

Mais en réalité, la figure 9 donne des ordres de grandeur de masses volumiques des couches les plus externes de la Terre nettement plus faibles que μ_{m1} . Et comme c'est dans ces couches qu'on veut stocker l'or, il serait plus juste



de prendre une autre valeur numérique de μ_m : $\mu_{m2} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Ceci conduit à une seconde valeur de R_1 : $R_{12} = 0,50 \text{ m}$.

Et la masse d'or associée est $m_{12} = \frac{4}{3} \pi R_{12}^3 = 10 \text{ tonnes}$. On pourrait s'en contenter !

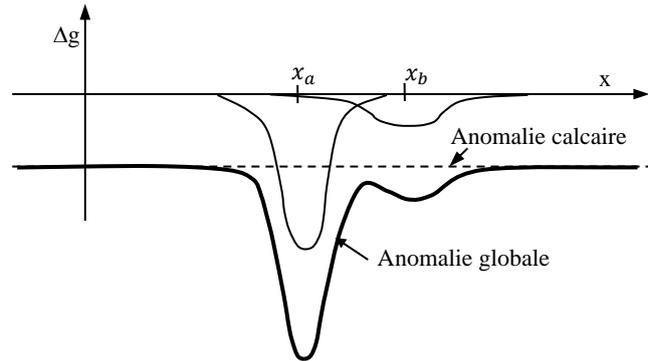
Q18- Les deux grottes sphériques, de rayon R , d'abscisses x_a et $x_b > x_a$, et de profondeurs h_a et $h_b > h_a$ vont créer deux anomalies de gravités négatives, $\Delta g_a = \frac{4\pi G h_a R^3 (-\mu_m)}{3((x-x_a)^2 + h_a^2)^{\frac{3}{2}}}$ et $\Delta g_b = \frac{4\pi G h_b R^3 (-\mu_m)}{3((x-x_b)^2 + h_b^2)^{\frac{3}{2}}}$ centrée respectivement

sur $x = x_a$ et $x = x_b$. L'amplitude de la seconde qui correspond à une grotte plus profonde étant nettement plus faible.

Et la couche uniforme de calcaire, de masse volumique plus faible que les couches plus profondes, va créer un déficit de gravité, puisqu'une couche moins dense crée un surplus de gravité, comme le montre la partie droite de la figure 10.

On ne sait pas bien si la couche de calcaire occupe aussi bien les domaines $x > 0$ et $x < 0$, ou si elle n'est que dans le domaine $x > 0$.

Dans le premier cas, on aurait la figure ci-contre



Dans le second cas, pour $x < 0$, la courbe rejoindrait l'axe des abscisses.

Problème n°3

I vibrations d'une corde de piano fixée à ses deux extrémités

I.A – mise en équation du mouvement transversal d'une corde de piano sans raideur

I.A.1)

- corde sans raideur : les actions entre deux portions de corde adjacentes se réduisent aux forces de tension, tangentes à la corde au point de contact.
- dans l'hypothèse des petits mouvements, les déplacements de la corde par rapport à sa position d'équilibre sont suffisamment petits pour qu'à tout instant et en tout point l'angle entre la tangente à la corde mobile et la tangente à la corde à l'équilibre soit petit devant 1.

I.A.2)

On prend comme système le segment de corde situé, à l'équilibre, entre les abscisses x et $x + dx$. Sa masse et son accélération ont pour expressions $\delta m = \mu dx$; $\vec{a} = \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{e}_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y$. Il est soumis aux forces de tension $\vec{T}(x + dx, t)$ et $-\vec{T}(x, t)$ à ses deux extrémités, où $\vec{T} = T_x \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y$. Les tensions \vec{T} sont donc des tensions de type + sur -.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au système, dans le référentiel du labo, galiléen, s'écrit $\mu dx \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{e}_y = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} dx$ En projetant sur l'axe y : $\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$

En projetant sur l'axe x : $0 = \frac{\partial T_x}{\partial x}$ Ceci montre que la composante en x de la tension de la corde est la même tout le long de celle-ci. Elle est aussi égale au produit de la norme de la tension par le cosinus de l'angle d'inclinaison. Ce cosinus étant assimilable à 1 (à l'ordre 1), cela permet de dire que la norme de la force de tension est égale à T_0 , en tout point et à tout instant.

Pour une corde sans raideur, la tension en tout point est colinéaire à la corde. En assimilant la tangente de l'angle d'inclinaison à son sinus, $[T_y \approx T_0 \frac{\partial y}{\partial x}]$

puis en dérivant par rapport au temps : $[\frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}]$

I.A.3)

On repart des équations $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$; $T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$ qui conduisent en éliminant T_y à l'équation de d'Alembert : $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. $[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}]$; $[c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}]$ où c représente la célérité des ondes transversales sur la corde.

La propagation des ondes de tension et de courant dans des lignes bifilaires, des ondes sonores dans les solides, obéit à la même équation.

I.A.4)

On convertit la tension exprimée (improprement !) sous forme d'une masse équivalente $m = 85 \text{ kg}$ en tension

$$[T_0 = mg \approx 0,85 \text{ kN}] \text{ . Pour l'acier } \mu = s\rho = \frac{\pi d^2}{4} \rho = 7,4 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ . D'où } [c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{4mg}{\pi \rho d^2}} = 3,4 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}]$$

I.B – modes propres d'une corde de piano sans raideur, fixée aux deux extrémités. Position du marteau

I.B.1)

Une onde stationnaire est une onde pour laquelle les dépendances spatiale et temporelle sont séparées : $s(x, t) = f(x) \cdot g(t)$ en notation réelle. C'est une onde qui ne se propage pas.

Le report de la forme précédente dans l'équation de d'Alembert conduit à l'équation $f''(x)g(t) = \frac{1}{c^2} f(x)g''(t)$ soit, en utilisant la propriété de séparation des variables $\frac{f''}{f} = \frac{1}{c^2} \frac{g''}{g} = cste = K$. L'équation différentielle en f s'écrit $f'' - Kf = 0$ et admet pour solutions des fonctions harmoniques ($K < 0$), affines ($K = 0$) ou en cosinus et sinus hyperboliques ($K > 0$). Comme la corde est fixée à ses deux extrémités, à tout instant $y(0, t) = y(L, t) = 0$, soit $f(0) = f(L) = 0$, condition qui ne peut être vérifiée, si f n'est pas identiquement nulle, que par les solutions harmoniques : $f(x) = f_0 \cos(kx + \psi)$ où f_0 est une constante arbitraire, $k = \sqrt{-K}$ et ψ dépend des conditions aux limites.

L'équation différentielle en g s'écrit alors $\frac{g''}{g} = c^2 \frac{f''}{f} = -(kc)^2$; $g'' + (kc)^2 g = 0$ et admet pour solution générale $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)$; $\omega = kc$ où g_0 est une constante arbitraire.

Les solutions de l'équation de d'Alembert en ondes stationnaires compatibles avec les conditions aux limites sont donc bien de la forme $y(x, t) = y_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$; $[\omega = kc]$

NB : on pouvait aussi, pour répondre à la question plus simplement, reporter la solution proposée dans l'équation de d'Alembert et vérifier que ça marchait.

I.B.2)

Les modes propres de la corde vibrante sont les ondes stationnaires purement sinusoïdales susceptibles d'exister sur la corde en l'absence d'excitation extérieure (régime libre). Les fréquences propres de la corde sont les fréquences de ses modes propres.

Les conditions aux limites de la corde s'écrivent $y(0, t) = y(L, t) = 0$ à tout instant, soit, comme le terme $y_0 \cos(\omega t + \varphi)$ n'est pas identiquement nul $\cos(\psi) = \cos(kL + \psi) = 0$

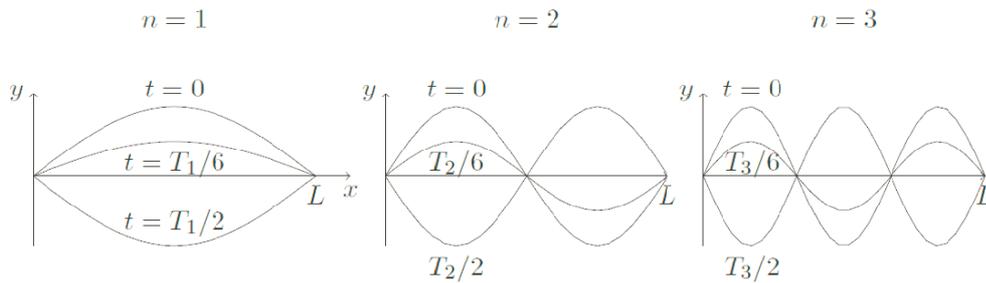
On en déduit : $\psi = \frac{\pi}{2}[\pi]$; $kL = n\pi$; $k_n = n\frac{\pi}{L}$ où n est un entier non nul. Les fréquences propres ont pour expression

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{k_n c}{2\pi} = \frac{nc}{2L}$$

Si on choisit $\psi = -\pi/2$, $\cos(kx + \psi) = \sin(kx)$, et les modes propres sont de la forme

$$y_n(x, t) = y_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi nct}{L} + \varphi\right)$$

à trois instants différents, l'allure de la corde pour les trois premiers modes est la suivante



I.B.3)

a) La largeur a du marteau intervient à la fois dans le coefficient qui se trouve devant la somme, et dans le premier sinus cardinal (on appelle sinus cardinal la fonction qui a x associe $\frac{\sin(x)}{x}$) qui intervient dans la somme : $\frac{\sin(n\pi a/L)}{n\pi a/L}$. Qualitativement, ce sinus cardinal prend des valeurs notables si $n\frac{\pi a}{L} < \pi$ et devient vite négligeable au-delà.

Le sinus cardinal a donc pour effet de limiter le rang n maximal des harmoniques présents dans la vibration de la corde à $n < n_{\max} = \frac{L}{a}$. En particulier, plus la taille du marteau est petite, plus le spectre est riche en harmoniques (mais moins l'amplitude de la vibration est importante, à cause du facteur se trouvant devant la somme). La fréquence caractéristique au-delà de laquelle les harmoniques ne sont pas excités par le marteau a pour expression

$$f = nf_1 = \frac{L}{a} f_1$$

correspondant à une longueur d'onde minimale

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{f_{\max}} = \frac{ca}{Lf_1} = 2a.$$

Qualitativement le marteau n'excite que les modes de longueurs d'onde supérieures à sa largeur.

Pour une corde de longueur $L = 65$ cm, de fréquence fondamentale $f_1 = 262$ Hz et un marteau de largeur $2a = 2$ cm

$$n_{\max} \approx 65 ; f_{\max} = 17 \text{ kHz}$$

Les modes non excités sont situés quasiment au-delà du spectre audible.

La taille des marteaux résulte d'un compromis :

- une augmentation de la taille du marteau conduit à une augmentation de l'amplitude des vibrations (y est proportionnel à a), donc à un son plus puissant
- une diminution de la taille de marteau permet d'augmenter le nombre de modes excités, donc favorise la richesse spectrale du son émis et sa qualité.

La taille du marteau indiquée correspond à ce compromis, car les modes excités couvrent pratiquement l'ensemble du spectre audible : diminuer sa taille conduirait à une diminution de l'amplitude du son sans amélioration audible de sa richesse.

b) La position x_0 du point d'attaque intervient dans l'expression de la vibration à nouveau par un sinus cardinal : $\frac{\sin(n\pi x_0/L)}{n\pi x_0/L}$. Pour supprimer l'harmonique de rang n il suffit que x_0 soit choisi de manière à annuler ce facteur. Pour éviter de supprimer des harmoniques de rang inférieur à n , il faut prendre la première annulation du sinus-cardinal

$$\frac{n\pi x_0}{L} = \pi ; \quad x_0 = \frac{L}{n}$$

I.C – Conséquences sur la conception des cordes d'un piano

I.C.1)

D'après la question I.B.2, la fréquence fondamentale de la corde vérifie $f = c/2L$, soit $L = \frac{c}{2f}$. Si la célérité est la même pour les différentes cordes, le produit Lf se conserve et, connaissant $f_{\text{Do } 4} = 262 \text{ Hz}$ et $L_{\text{Do } 4} = 65 \text{ cm}$, on détermine les valeurs

$$\text{Grave : } L_{\text{La } 0} = \frac{f_{\text{Do } 4}}{f_{\text{La } 0}} L_{\text{Do } 4} = \boxed{6,1 \text{ m !!}} ; \text{ Aigu : } L_{\text{Do } 8} = \frac{f_{\text{Do } 4}}{f_{\text{Do } 8}} L_{\text{Do } 4} = \boxed{4,1 \text{ cm !!}}$$

I.C.2)

On reprend la relation précédente en exprimant la célérité $c = \sqrt{T_0/\mu} f = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

En augmentant la masse linéique des cordes, il est possible, à tension et longueur fixées, de diminuer leur fréquence fondamentale, et ainsi produire les notes graves sans augmentation de la longueur des cordes.

On peut envisager de diminuer la tension des cordes pour produire les notes graves. Cependant il y a un risque de mauvaise répartition des contraintes sur le cadre du piano. Et une corde trop molle n'obéit plus à l'équation de d'Alembert (poids non négligeable devant les forces de tension) et n'interagit plus de façon satisfaisante avec le marteau.

I.C.3)

La masse linéique de la corde filée a pour expression

$\mu = s_{\text{acier}} \rho_{\text{acier}} + s_{\text{Cu}} \rho_{\text{Cu}} = \frac{\pi}{4} (D^2 \rho_{\text{acier}} + ((D + 2e)^2 - D^2) \rho_{\text{Cu}}) = 89 \text{ g m}^{-1}$ On en déduit pour le La 0 de fréquence $f = 28 \text{ Hz}$

$$L = \frac{1}{2f} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \boxed{1,7 \text{ m}} \text{ ce qui est plus pratique que } 6\text{m}.$$

I.D – Prise en compte de la raideur : dispersion et inharmonicité

I.D.1)

a) L'équation aux dimensions s'écrit

$$[\Gamma] = \frac{L^4 \text{ Pression } L}{L^2} = \text{Pression } L^3 = \text{Force } L = \text{Couple}$$

b) Le principe théorème de la résultante cinétique est inchangé par rapport à la question I.A.2), et conduit aux deux équations scalaires

$$0 = \frac{\partial T_x}{\partial x} ; \quad \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$$

La première équation montre bien que T_x ne dépend que du temps. On le prend égal à T_0

c) Le mouvement de la corde se fait dans le plan xOy , donc le vecteur rotation du tronçon de corde de longueur dx , de barycentre G considéré est dirigé selon \vec{e}_z . La distance maximale des points de ce tronçon à l'axe Gz est $dx/2$, donc le moment d'inertie du tronçon par rapport à Gz est négligeable (ordre 3 en dx).

Le moment en G des actions s'appliquant sur le tronçon de corde à ses extrémités A d'abscisse x et B d'abscisse $x + dx$ a pour expression

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{GB} \wedge \vec{T}_d(x + dx) + \vec{\Gamma}(x + dx) + \vec{GA} \wedge \vec{T}_g(x) - \vec{\Gamma}(x) \text{ avec } \vec{GB} = -\vec{GA} = \frac{dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y}{2} \\ \vec{M} &= \frac{dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y}{2} \wedge (2T_0 \vec{e}_x + (T_y(x + dx) + T_y(x)) \vec{e}_y) + \vec{\Gamma}(x + dx) - \vec{\Gamma}(x) \\ &= \left(\frac{dx}{2} (T_y(x + dx) + T_y(x)) - dy T_0 + \Gamma(x + dx) - \Gamma(x) \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

soit à l'ordre 1 en dx

$$\vec{M} = \left(T_y - \frac{\partial y}{\partial x} T_0 + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) dx \vec{e}_z$$

Ce moment est d'ordre 1 en dx , donc le moment cinétique d'ordre 3 est bien négligeable. Le théorème du moment cinétique barycentrique s'écrit alors $\vec{M} = \vec{0}$, soit

$$\boxed{T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x}}$$

d) On déduit des 2 questions précédentes l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $y(x, t)$:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}$$

et, d'après l'expression de $\Gamma(x, t)$, on retombe bien sur :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + E \frac{\pi r^4}{4} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

I.D.2)

a) L'expression proposée pour $y(x, t)$ conduit aux relations

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y ; \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = k^4 y$$

soit en reportant dans l'équation des mouvements de la corde

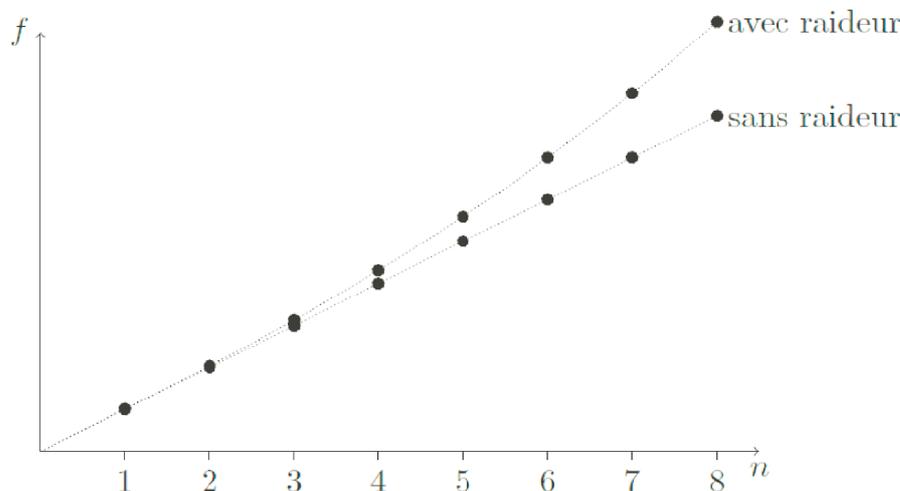
$$\omega^2 = \frac{T_0}{\mu} k^2 + E \frac{\pi r^4}{4\mu} k^4 = c^2 k^2 \left(1 + E \frac{\pi r^4}{4T_0} k^2 \right)$$

b) Les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ sont inchangées par rapport au I.B), donc k vérifie toujours la relation $k_n = \frac{n\pi}{L}$.

Par conséquent, d'après la question précédente

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{ck_n}{2\pi} \sqrt{1 + E \frac{\pi r^4}{4T_0} k_n^2} = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + E \frac{\pi^3 r^4}{4T_0 L^2} n^2} = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + Bn^2} ; \quad \text{B} = \frac{\pi^3 E r^4}{4T_0 L^2}$$

Il faut savoir que les cordes d'un piano à queue sont plus longues que celles d'un piano droit, donc la valeur de B est plus petite pour un piano à queue, et l'effet de la raideur des cordes est plus faible : la déviation des fréquences des harmoniques par rapport à une série arithmétique est plus petite.



c) Les fréquences propres de la corde sans raideur forment une suite arithmétique. Celles de la corde avec raideur s'en écartent d'autant plus que leur rang n est élevé.

d) Application numérique : $B = 3,7 \times 10^{-4}$.

Pour les harmoniques de rang inférieur à 20, le facteur correctif Bn^2 est petit devant 1, et de manière approchée

$$f_n = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + Bn^2} = f_n^0 \sqrt{1 + Bn^2} \approx f_n^0 \left(1 + \frac{Bn^2}{2} \right)$$

On en déduit l'inharmonicité

$$i_n = \frac{f_n - f_n^0}{f_n^0} = \frac{Bn^2}{2}$$

e) On cherche à déterminer le rang n à partir duquel

$$\frac{f_n}{f_n^0} = \sqrt{1 + Bn^2} > 2^{1/12} ; \quad \text{B} = \frac{\pi^3 E r^4}{4T_0 L^2} ; \quad n > \sqrt{\frac{2^{1/6} - 1}{B}} = 18$$

L'écart sera supérieur au demi-ton à partir de l'harmonique de rang 18.