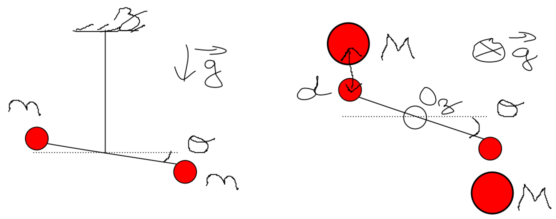
Travaux Dirigés de M_7

Exercice 1 : Expérience de Cavendish

La figure ci-dessous illustre le principe de l'expérience de Cavendish. Deux particules de masse m sont fixées aux extrémités d'une tige de longueur $2l$, un fil de torsion relie le centre de la tige à un point fixe du laboratoire, réalisant ainsi un pendule de torsion. En approchant deux sphères de masse M à une distance d de chacune des extrémités du pendule, on observe une déviation angulaire dont la mesure permet de déterminer G la constante de gravitation.



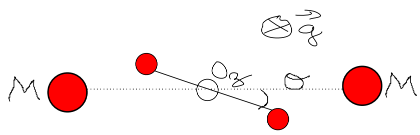
Dans la suite, on note θ la déviation angulaire du pendule à sa position d'équilibre. On note k la raideur angulaire du fil de torsion : le moment du couple de rappel et $-k\theta\vec{u}_z$. Les sphères de masse M et les particules m sont considérées comme des particules ponctuelles.

Méthode historique

1. Calculer la déviation angulaire θ due à l'attraction des sphères. On suppose $\theta l \ll d$ et $l \gg d$. On fera bien attention à justifier toutes les simplifications effectuées en précisant à chaque fois l'hypothèse utilisée.
2. Pour son expérience, Cavendish a eu utilisé les paramètres suivants : $m = 0{,}80$ kg, $M = 158$ kg, $l = 1{,}0$ m, $d = 20$ cm et $k = 3{,}6.10^{-4}$ kg.m^2.s^{-1}. Calculer la valeur numérique de θ.
3. On suppose que la masse de la tige qui relie les deux particules de masse m est négligeable. Calculer le moment d'inertie I du pendule de torsion par rapport à son axe de rotation.
4. Parmi les différentes grandeurs qui interviennent dans la détermination de G à partir de la mesure de θ, laquelle vous semble la plus difficile à déterminer directement ? Proposer une expérience complémentaire pour mesurer cette grandeur. Éxprimer G en fonction de M, l, d et θ et du résultat de la mesure que vous avez proposée.

Méthode dynamique

1. En l'absence des masses M, quelle est la période T des oscillations du pendule de torsion ?
2. On ajoute les masses M à une distance d des masses m, mais cette fois-ci dans l'alignement de la tige du pendule. On cherche la nouvelle période des oscillations. On suppose à nouveau que $l\theta \ll d$. Calculer le moment de la force exercée par une masse M sur le pendule de torsion.
3. On suppose que l'angle θ est petit devant 1 rad. Quelle est la période des oscillations T'.
4. Montrer que l'on peut alors mesurer G à l'aide de T et T'.



Exercice 2 : **Étude d'une poulie** Une masse m de 5,0 kg est suspendue à l'extrémité d'une corde enroulée sur une poulie de masse $m_p = 1{,}0$ kg et de rayon $R = 10$ cm en liaison pivot idéale autour de son axe (horizontale) avec un support fixe. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut $I = \frac{1}{2} m_p R^2$

1. Si la poulie est en rotation uniforme autour de son axe à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, quelle est la vitesse de la masse m ?
2. La poulie est retenue par un opérateur. Où ce dernier a-t-il le plus intérêt à appliquer sa force et dans quelle direction ? Quelle est la force minimale qu'il doit exercer sur la poulie pour l'empêcher de tourner ?
3. L'opérateur lâche la poulie qui se met en mouvement. Déterminer l'accélération de la masse ainsi que la tension de la corde

1. La même que celle d'un point du fil, donc un point de la périphérie de la poulie : $R\dot{\theta}$
2. L'opérateur a tout intérêt a exercer sa force le plus loin possible de l'axe de rotation et telle que la force soit tangente à la poulie pour que le bras de levier soit le plus grand possible. La force qu'il doit exercer est alors simplement l'opposé du poids de la masse (bilan sur le système {poulie+fil+masse}
3. Système : { poulie +fil+masse } ; Forces extérieures : poids de la masse, poids de la poulie, réaction du support de la poulie. Ref : terrestre local galiléen. On ne connait pas la réaction du support, il faut donc utiliser un théorème qui ne la fait pas apparaitre, ici le TMC car son moment est nul.

   On pose Δ l'axe orienté tel que le moment du poids de la masse soit positif, on note x l'altitude de la masse selon un axe orienté vers le bas, on a alors d'après le TMC projeté sur Δ

   $$\frac{d}{dt}\left(I\dot{\theta} + m_p R\dot{x}\right) = mgR \Leftrightarrow (I + R^2 m)\ddot{\theta} = mgR \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{mgR}{(I + R^2 m)}$$

   d'où $\theta = \frac{1}{2}\frac{mgR}{(I+R^2m)}t^2$ et $\dot{\theta} = \frac{mgR}{(I+R^2m)}t$ (pour avoir x et $\dot{x}$ il suffit de multiplier par R.

   Pour avoir la tension de la corde, il suffit de faire un PFD sur la masse seule (projeté selon x)

   $$-T + P = m_p\ddot{x} = mR\ddot{\theta} \Rightarrow T = m_p(g - R\frac{mgR}{(I + R^2 m)}) \Rightarrow T = mg(1 - \frac{1}{(1 + \frac{I}{mR^2})})$$

   On peut éventuellement remplacer I par l'expression donnée dans l'énoncée.

Exercice 3 : **Volant d'inertie**

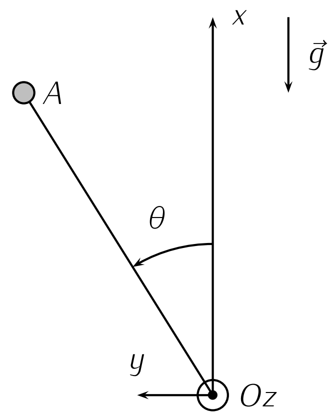
Initialement immobile, une machine tournante de moment d'inertie J par rapport à son axe est soumise à partir de l'instant $t = 0$ à l'action d'un couple moteur de moment Γ_0 constant. On étudie le mouvement de la machine en supposant que l'ensemble des forces de frottement a un moment de la forme $-k\omega$.

1. Analyser ce mouvement en identifiant d'abord la vitesse angulaire ω_0 atteinte en régime permanent ainsi que le temps de relaxation τ du système. Donner l'expression de ω/ω_0 en fonction de t/τ et décrire l'évolution. Faire un bilan des forces et des moments qui s'exercent sur le volant. Appliquez le théorème du moment cinétique pour aboutir à une équation différentielle du premier à coefficients constants.
2. On reprend l'étude précédente en supposant que, en raison de vibration indésirables, le couple moteur n'est plus une constante mais est modulé à la pulsation Ω avec un taux de modulation η tel que $\Gamma = \Gamma_0(1 + \eta\cos\Omega t)$. Établir l'équation différentielle définie par la fonction $\zeta(t)$ telle que $\omega(t) = \omega_0(1 + \zeta(t))$. Montrer que, au bout d'un temps suffisant $\zeta(t)$ est une fonction sinusoïdale

de pulsation Ω que l'on cherchera sous la forme : $\zeta = \alpha\cos(\Omega t + \varphi)$. Appliquez la même méthode qu'à la question précédente. Déterminer les constantes α et $\tan(\varphi)$. On a affaire à une équation différentielle dont le second membre est sinusoïdal. On peut alors faire l'étude en régime sinusoïdal forcé. Passez l'équation différentielle dans le domaine des complexes et exprimer l'amplitude complexe de ζ. À l'aide des expression précédentes, expliquer pourquoi, de façon à régulariser le fonctionnement d'une machine tournant, on adjoint aux parties tournantes un anneau massif de rayon rayon appelé volant.

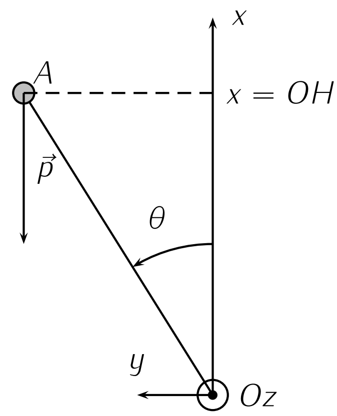
1. $\omega/\omega_0 = 1 - \exp(-t/\tau)$ avec $\tau = J/k$
2. $\alpha = \frac{\eta}{\sqrt{1+\Omega^2\tau^2}}$, $\tan(\varphi) = \Omega\tau$

Exercice 4 : Pendule de Holweck – Lejay.



Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable et de longueur $L = OA$, articulée en O et mobile dans un plan vertical.
Un ressort "spirale" (non représenté sur la figure) exerce sur M, via la tige, un couple de rappel équivalent à un moment de force dont la projection sur Oz est : $\mathcal{M}_{Oz} = -C\theta$.

1. Déterminer, par application du théorème scalaire du moment cinétique, l'équation différentielle vérifiée par θ.
2. À quelle condition, la position $\theta = 0$ correspond elle à un équilibre stable ?
3. Si cette condition est vérifiée, calculer la période T des petites oscillations autour de $\theta = 0$ et mettre T sous la forme $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{G-g}}$. On donnera l'expression de G.
4. Calculer $\frac{\Delta T}{T}$ la variation relative de T si g varie de Δg. Voyez-vous une application ?



1. Application du théorème scalaire du moment cinétique sur l'axe Oz.
   On commence par calculer le moment cinétique de A par rapport à O : $L_{Oz}(A) = +L.mv = mL^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{dL_{Oz}}{dt} = mL^2\ddot{\theta}$.
   Les moments de force sont $\mathcal{M}_{Oz} = -C\theta$ pour le couple de rappel et $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{p}) = +mgAH = mgL\sin\theta$ (AH est le bras de levier.)
   Par application du TSMC selon Oz fixe,
   $$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{Oz} \Rightarrow mL^2\ddot{\theta} = -C\theta + mgL\sin\theta$$
   $$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{mL^2}\theta - \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$
2. En considérant $\sin\theta \simeq \theta$ (oscillations de faible amplitude autour de 0), l'équation devient linéaire :
   $$\ddot{\theta} + \frac{C}{mL^2}\theta - \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C - mgL}{mL^2}\theta = 0$$
   et correspond à l'équation d'un oscillateur harmonique oscillant autour d'une position d'équilibre stable si tous les coefficients sont de même signe c'est à dire si $C \geq mgL$.
   Physiquement, il faut que le ressort ait une constante de raideur assez grande pour "retenir A".

3. La condition précédente étant vérifier, l'équation devient :

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{C - mgL}{mL^2}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\frac{C}{mL} - g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{G-g}} \text{ où } G = \frac{C}{mL}$$

4. D'après la réponse à la question précédente,

$$T = 2\pi\sqrt{L}(G-g)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dT}{dg} = \pi\sqrt{L}(G-g)^{-\frac{3}{2}} = \frac{2\pi\sqrt{L}(G-g)^{-\frac{1}{2}}}{2(G-g)} = \frac{T}{2}\frac{1}{G-g} \Rightarrow dT = \frac{T\,dg}{2(G-g)}$$

En considérant des variations ΔT et Δg faibles, on peut remplacer dT par ΔT et dg par Δg, on dit qu'on "passe aux Δ" et on a alors $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta g}{2(G-g)}$

On voit que la variation relative de la période (qui peut être facilement mesurée) dépend de Δg, elle peut même être très importante y compris pour Δg faible, il faut pour cela choisir $G = \frac{C}{mL}$ proche de g en choisissant correctement les caractéristiques du pendule) : appareil très sensible si $G \simeq g$. Ainsi, on peut mesurer des variations, mêmes faibles de g qui peuvent par exemple être dues à la présence dans le sous sol d'une cavité (nappe de pétrole, mine ...) : utile en géodésie (science qui a pour objet de mesurer la surface de la terre ou une partie de cette surface).

Remarque : on utilise maintenant d'autres méthodes qui font intervenir la vitesse de propagation d'ondes sismiques.

Exercice 5 : **Chute d'un arbre (ou d'un stylo)**

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et est immobile.

On donne le moment d'inertie par rapport à un axe orthogonal à l'arbre et passant par une des extrémité : $I = \frac{1}{3}mL^2$

1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre Faire un bilan des forces et appliquez le théorème du moment cinétique.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ, sa vitesse angulaire est :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$

L'astuce souvent employée consiste à multplier terme à terme l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ puis d'intégrer. Faites attentions aux constantes d'intégration.

3. ré-écrire cette relation en utilisant la méthode de séparation des variables telle qu'elle a été vue en cinétique chimique (mettre tout les t et dt d'un coté et tout les θ et $d\theta$ de l'autre)
4. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On donne pour $\theta = 5°$ Il s'agit d'intégrer l'équation différentielle.

$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5{,}1$$

5. Proposez un programme permettant d'évaluer cette intégrale dans le cas général.
6. On se rend compte que lorsque $\theta_0 \to 0$, l'intégrale tend vers l'infini. Et le temps de chute ? Est-ce surprenant ?

7. Par une méthode similaire, calculer la période des oscillations d'un pendule simple en fonction de l'amplitude lorsque l'on ne peut pas faire l'approximation des petites amplitudes. (on exprimera le résultat sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer)

1. Le poids s'applique au niveau du centre de masse, donc à une hauteur $L/2$. Son bras de levier par rapport à l'axe horizontal orthogonal à l'arbre passant par le point d'appui est donc $\frac{L}{2}\sin\theta$. Le TSMC donne
$$I\ddot{\theta} = mg\frac{L}{2}\sin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta$$
2. On multiplie par $\dot{\theta}$ et on intègre entre $t' = 0$ et $t' = t$ (ou on fait une méthode énergétique, ce qui revient au même : $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = W(P) = -\Delta E_p = -\frac{mgL}{2}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$). On isole ensuite $\dot{\theta}$ et on a la relation demandée.
3. Séparation des variables : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$
4. $$\int_0^{T_{\text{chute}}} dt = \sqrt{\frac{L}{3g}}\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$$
d'où un temps de chute d'environ 5,1 s (si on prend $g = 10$).
5. On peut faire une intégrale par la méthode des rectangles à droite (la méthode des rectangles à gauche pose des problèmes à cause de la divergence en θ_0 de la fonction à intégrer). Voir le code en fin de correction.
6. C'est normal car on a une position d'équilibre instable (instable certe, mais position d'équilibre)
7. Pour le pendule simple : $\frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) = E_m = cte = 0 + mgl(1-\cos\theta_{\text{max}})$ car la vitesse s'annule lorsque le pendule fait demi-tour. D'où
$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}\times 2(\cos\theta - \cos\theta_{\text{max}})} \Rightarrow dt = \pm\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{g}{l}\times 2(\cos\theta - \cos\theta_{\text{max}})}}$$
Ensuite, on va se placer sur une demi-période de $-\theta_{\text{max}}$ à θ_{max} et on sait que $\dot{\theta} > 0$ d'où
$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\theta_{\text{max}}}^{\theta_{\text{max}}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_{\text{max}})}}$$

```python
import numpy as np
def f(theta) :
    return 1/np.sqrt(np.cos(theta_0)- np.cos(theta))

I = 0
n = 10000
theta_0 = 5/180*np.pi
h = (np.pi/2 - theta_0)/n

for i in range(1, n+1):
    I = I + f(theta_0 + i*h )*h
```