Variables aléatoires - analyse
DS8

Durée : 3h **Calculatrice interdite**

Exercice 1 : Limites, equivalents et DL

1. Calculez les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{e^x-1}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{x^2}$$
2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.
   a) Donnez le développement limité à l'ordre 2 de f en 0. En déduire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0, ainsi que les positions relatives de cette tangente et de $\mathcal{C}_f$.
   b) Montrez que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont vous préciserez l'équation et la position par rapport à $\mathcal{C}_f$.

1. On a $e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et Comme $\lim_{x\to 0} 3x = 0$, on a $\ln(1+3x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$, d'où, par quotient d'équivalents :
$$\frac{\ln(1+3x)}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3x}{x} = 3$$
ainsi $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{e^x-1} = 3}$
Pour la deuxième limite, on a besoin des développements limités pour le numerateur. L'ordre 2 devrait suffire. Comme $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et que $3x \to 0$ quand $x \to 0$, on a
$$\cos(3x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)$$
Et donc $\cos(3x)-\cos(x) \underset{x\to 0}{=} -4x^2 + o(x^2) \sim -4x^2$ On en déduit $\dfrac{\cos(3x)-\cos(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -4$ et donc $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{x^2} = -4}$.
2. a) Beaucoup de choses disparaissent à l'ordre 2 pour le numerateur :
On a déjà $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ et on peut substituer car $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. Il reste donc $\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
Et en multipliant par x, on n'a plus que $x\sqrt{x^2+1} \underset{x\to 0}{=} x + o(x^2)$
Enfin, en écrivant $f(x) = x\sqrt{x^2+1} \times \dfrac{-1}{1-x}$, il ne reste plus qu'à faire un produit de DL avec $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$
Il vient donc $f(x) = Tr_2\left(x(-1-x-x^2)\right) + o(x^2)$, c'est à dire
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} -x - x^2 + o(x^2)}$$
On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une $\boxed{\text{tangente d'équation } y = -x}$ en 0.
De plus $f(x) - (-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$, donc $f(x) - (-x) \leq 0$ au voisinage de 0, ce qui signifie que la $\boxed{\text{courbe est en dessous de sa tangente.}}$
   b) Commençons par remarquer que $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$
On pose maintenant $X = \dfrac{1}{x}$.
Alors $\dfrac{f(\frac{1}{X})}{\frac{1}{X}} = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{X^2}+1}}{\frac{1}{X}-1} = \dfrac{X}{1-X}\sqrt{\dfrac{1+X^2}{X^2}}$

Au voisinage de $+\infty$, $x \geq 0$, donc $X \geq 0$ aussi et donc $\sqrt{X^2} = X$.
Ainsi $\dfrac{f(\frac{1}{X})}{\frac{1}{X}} = \dfrac{1}{1-X}\sqrt{1+X^2}$.
On peut maintenant déterminer un DL quand $X \to 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(\frac{1}{X})}{\frac{1}{X}} &\underset{X\to 0}{=} Tr_2\left[(1+X+X^2)(1+\frac{1}{2}X^2)\right] + o(X^2)\\ &\underset{X\to 0}{=} 1+X+\frac{3}{2}X^2+o(X^2)\end{aligned}$$

On en déduit $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{2x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})$

Et finalement $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x+1+\dfrac{3}{2x}+o(\dfrac{1}{x})}$

Conclusions :

— Comme $f(x)-(x+1) = \dfrac{1}{2x} + o(\dfrac{1}{x})$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1) = 0$ et donc $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x+1$.

— Comme $f(x)-(x+1) \sim \dfrac{1}{2x}$ et que $\dfrac{1}{2x} \geq 0$ au voisinage de $+\infty$, on a $f(x)-(x+1) \geq 0$ au voisinage de $+\infty$ et donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de son asymptote.

Exercice 2 : couple de variables aléatoires

On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire donnant le résultat de ce dé.

1. Donnez la loi de X et calculez $E(X)$, $E(X^2)$ et $V(X)$.
2. Une fois le dé lancé, on choisit un nombre au hasard entre 1 et X, et on note Y ce nombre.
   a) Pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, donnez la loi de Y sachant $(X=k)$.
   b) Donnez la loi du couple (X,Y) et précisez la loi de Y.
   c) Donnez la loi de $Z = X+Y$.

Vous avez (j'espère) reconnu un exo du TD ! (celui avec les urnes numerotées, en version sans modèle compliqué)

1. Le dé est équilibré, donc $X \sim \mathcal{U}([\![1;6]\!])$
   On a alors $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{6} kP(X=k) = \dfrac{1}{6}\sum\limits_{k=1}^{6} k = \dfrac{7}{2}$
   Ensuite, par le théorème de transfert,

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X=k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{1}{6}\frac{6\times 7\times 13}{6} = \frac{91}{6}$$

   Enfin, la formule de Koenig Huygens donne $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{91}{6} - \dfrac{49}{4}(= \dfrac{35}{12})$

   a) Sachant $(X=k)$, d'après l'énoncé, $Y \underset{(X=k)}{\sim} \mathcal{U}([\![1;k]\!])$

   b) Notons déjà que $X(\Omega)\times Y(\Omega) = [\![1,6]\!]^2$. On cherche, pour tout $(k,j) \in [\![1,6]\!]^2$, $P(X=k, Y=j)$
   Par la formule des probabilités composées, on a $P(X=k,Y=j) = P(X=k)P_{X=k}(Y=j)$
   Si $k<j$, alors $P_{X=k}(Y=j) = 0$ et $P(X=k,Y=j) = 0$
   Si $k \geq j$, d'après la question précédente, on a $P(X=k,Y=j) = \dfrac{1}{6k}$

   On peut alors faire un tableau et donner la loi de Y via la formule $P(Y=j) = \sum\limits_{k=1}^{6} P(X=k, Y=j) = \dfrac{1}{6}\sum\limits_{k=j}^{6}\dfrac{1}{k}$:

$X\backslash Y$	1	2	3	4	5	6	loi de X
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
loi de Y	$\frac{147}{360}$	$\frac{87}{360}$	$\frac{57}{360}$	$\frac{37}{360}$	$\frac{22}{360}$	$\frac{1}{36}$	

c) Remarquons déjà que $Z(\Omega) = [\![2;13]\!]$
Pour tout $k \in Z(\Omega)$, $(Z = k) = \cup_{i=1}^{k}(X = i) \cap (Y = k - i)$
Tous ces événements sont disjoints, et donc $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} P(X = i, Y = k - i)$
plus qu'à lire ces cases dans le tableau et les additionner pour avoir la loi de Z.

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Y = y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12} + \frac{1}{18}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exercice 3 : développement limité et bijection

Soit $f : x \mapsto xe^{x^2}$.

1. Justifiez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Précisez $f^{-1}(0)$.
2. Déterminez le $DL_5(0)$ de f.
3. L'objectif est de présenter une méthode, générale, pour calculer le DL_5 en 0 de f^{-1}, sans calculer pour autant f^{-1} de manière explicite.
   a) Justifiez (sans chercher à le calculer pour le moment) que f^{-1} admet aussi un développement limité d'ordre 5 en 0, de la forme
   $$f^{-1}(x) \underset{0}{=} a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5)$$
   b) Justifiez qu'on peut substituer dans l'expression précédente x par $f(x)$ et en déduire un développement limité à l'ordre 5 de $f^{-1}(f(x))$, en fonction de $a_1, a_2, \dots, a_5$.
   c) Utiliser l'unicité du DL_5 de $f^{-1}(f(x))$ pour donner une relation entre les coefficients a_i, et en déduire l'expression du $DL_5(0)$ de f^{-1}.

1. Par composition et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} > 0$$
donc f est strictement croissante, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et que f est continue, on a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
Ainsi, on a bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Comme $f(0) = 0$, on a $f^{-1}(0) = 0$.

2. Comme on multiplie par x, un $DL_4(0)$ de e^{x^2} va suffire. Comme $x^2 \to 0$ quand $x \to 0$, on peut substituer dans le DL de exp et on a :
$$e^{x^2} \underset{0}{=} 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$
d'où
$$f(x) \underset{0}{=} x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)$$

3. a) Comme f est bijective et de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ également. Par Taylor Young, elle admet un développement limité à tout ordre, et d'ordre 5 en particulier.
De plus, comme $f^{-1}(0) = 0$, le coefficient d'ordre 0 vaut 0.
Remarquons aussi qu'on peut déjà affirmer que a_2 et a_4 valent 0, car f^{-1} est impaire :

En effet, soit $y \in \mathbb{R}$. Alors il existe un unique $x \in R$ tel que $f(x) = y$ (en fait, $x = f^{-1}(y)$) et on a $f(-x) = -f(x)$, donc $-y = f(-x)$, c'est à dire $f^{-1}(-y) = -x = -f^{-1}(y)$.
Ainsi, f^{-1} est bien impaire.
(On peut tout à fait traiter l'exercice sans cette remarque...)

b) La fonction f est continue en 0, avec $f(0) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et on a donc

$$f^{-1}(f(x)) = a_1(f(x))^2 + a_3 f(x)^3 + a_5 f(x)^5 + o(f(x)^5)$$

soit, en substituant par le DL_5 de f :

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= a_1(x + x^3 + \frac{x^5}{2}) + a_3(x^3 + 3x^5) + a_5 x^5 + o(x^5) \\ &= a_1 x + (a_1 + a_3)x^3 + (\frac{1}{2}a_1 + 3a_3 + a_5)x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

c) Comme $f^{-1}(f(x)) = x$ par unicité du DL, on en déduit que

$$a_1 = 1, a_1 + a_3 = 0 \text{ et } a_1 + 3a_3 + a_5 = 0$$

d'où $a_1 = 1$, $a_3 = -1$ et $a_5 = \dfrac{5}{2}$, et finalement

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5)$$

Exercice 4 : suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

Et soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{\ln(u_n)}$$

1. Précisez l'ensemble de définition de f, que l'on notera D.
2. Dresser le tableau de variations de f sur D, complété avec les limites aux bornes de D.
3. Montrer que f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ dans $[e, +\infty[$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
5. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e$ (on rappelle que $2,7 \leq e \leq 2,8$).
6. Montrez que, sur l'intervalle $[e, +\infty[$, f' admet un maximum en e^2.
7. En déduire que tout $x \geq e$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$
8. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|$, puis que $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}|3 - e|$
9. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1. $f(x)$ est défini si et seulement si $\ln(x)$ est défini et $\ln(x) \neq 0$, donc $D = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0;1[\cup]1;+\infty[$
2. Par quotient de fonctions dérivable sur D, f est dérivable sur D avec

$$f'(x) = \frac{1 \times \ln(x) - x\frac{1}{x}}{(\ln(x)^2)} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$$

Comme $\ln(x)^2 > 0$ pour tout x, on a $f'(x)$ du signe de $\ln(x) - 1$.

Pour les limites : comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (forme $\dfrac{0}{-\infty}$ qui n'est pas une FI !)

En $+\infty$, les croissances comparées donnent $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

En 1^-, $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x) = 0^-$ d'où $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.

En 1^+, $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x) = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. on obtient finalement le tableau :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

3. f est strictement croissante sur $[e, +\infty[$ donc elle est bijective de $[e, +\infty[$ sur $f([e, +\infty[)$. Comme f est continue, l'image de $[e, +\infty[$ est l'intervalle $[f(e), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [e, +\infty[$.

4.
$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x}{\ln(x)} = x \\ &\Leftrightarrow x = x\ln(x) \\ &\Leftrightarrow x(1-\ln(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = e \end{aligned}$$

Ainsi, sur D, $\boxed{f(x) = x \Leftrightarrow x = e}$

5. C'est une récurrence facile...
Comme $u_0 = 3$, on a bien $u_0 \geq e$ et la propriété est initialisée.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \geq e$.
f est croissante sur $[e, +\infty$, donc on a $f(u_n) \geq f(e)$.
Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(e) = e$, on obtient
$$u_{n+1} \geq e$$
la propriété est donc héréditaire.
Par le principe de récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e$.

6. On dérive f' et on obtient :
$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln(x))^2 - \frac{2}{x}(\ln(x)-1)\ln(x)}{(\ln(x))^2} = \frac{2-\ln(x)}{x\ln(x)}$$
Comme $x \geq e$, $x\ln(x) \geq 0$, et $f''(x)$ est du signe de $2-\ln(x)$, c'est à dire positif pour $x \in [e, e^2]$, puis negatif pour $x \geq e^2$.
Ainsi f' est croissante sur $[e, e^2]$, puis décroissante sur $[e^2, +\infty[$. Elle admet donc un maximum en e^2

7. D'après l'étude à la question 2, $f'(x) \geq 0$ sur $[e, +\infty[$. De plus, elle admet un maximum en e^2 et $f'(e^2) = \dfrac{\ln(e^2)-1}{\ln(e^2)^2} = \dfrac{2-1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$
Ainsi $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.

8. Pour tout $x \geq e$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x, y \geq e$,
$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x-y|$$
Comme pour tout n, $u_n \geq e$, on peut remplacer dans l'inégalité x par u_n et y par e, ce qui donne $|f(u_n) - f(e)| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - e|$, c'est à dire
$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|$$
On procède ensuite par récurrence :
Pour $n = 0$: $|u_0 - e| = |3-e| \leq \dfrac{1}{4^0}|3-e|$
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $|u_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}|3-e|$
Alors $|u_{n+1} - e| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - e| \leq \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{4^n}|3-e| = \dfrac{1}{4^{n+1}}|3-e|$
La propriété est bien héréditaire.
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité est vérifiée.

9. Comme $|\dfrac{1}{4}| < 1$, $\lim \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$, donc $\lim |u_n - e| = 0$ et finalement $\boxed{\lim u_n = e}$.

Exercice 5 : gastronomie sur la Terre des Lions

Simba et Nala chassent des gazelles et des zèbres pour les repas de toute la famille (ils ont deux petits).

En famille moderne, Simba accompagne Nala à la chasse, et le couple est particulièrement efficace : chaque chasse se termine soit par la capture d'un zèbre, avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, soit par la capture d'une gazelle, avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. Le couple ne revient donc jamais bredouille, et les chasses sont supposées indépendantes.

Chaque repas de la famille est ainsi composé d'une gazelle ou d'un zèbre, et on suppose la composition d'un repas indépendante de celle des repas précédents (puisque les chasses sont indépendantes...).

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose les événements :

G_i : "Le i-ème repas est constitué d'une gazelle"
Z_i : l'événement "le $i$ème repas est constitué d'un zèbre".

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On observe N repas de la famille.
   Soit X le nombre de fois qu'une gazelle a été consommée au cours des N repas.
   Quelle est la loi de X, son espérance et sa variance ?
2. Les lionceaux ont besoin de variété dans les repas et n'aiment pas manger deux fois de suite la même chose, particulièrement quand c'est deux fois des gazelles. On s'intéresse donc à la première fois où la famille consomme deux fois de suite des gazelles.
   a) Soit A l'événement "les deux premiers repas sont constitués de gazelles". Déterminez $P(A)$.
   b) Calculez la probabilité de l'événement B : "le premier repas était constitué d'un zèbre, et les deux suivants de gazelles."
   c) Soit C l'événement :"au cours des 4 premiers repas, la première fois que le repas *gazelle* s'est répété est lors des 3-ème et 4-ème repas.". Calculer $P_{G_1}(C)$ et $P_{Z_1}(C)$. En deduire $P(C)$.
3. Soit Y la variable aléatoire donnant le numero du repas où, pour la première fois, la famille a mangé deux gazelles à deux repas consécutifs.
   Par exemple, si la suite de repas est $G_1Z_2Z_3G_4Z_5G_6G_7Z_8G_9Z_{10}G_{11}G_{12}$, alors Y vaut 7.
   a) Que valent $P(Y = 2)$, $P(Y = 3)$ et $P(Y = 4)$?
   b) Pour tout $n \geq 2$, justifiez "en français" (vous avez droit au blabla, mais restez synthétique et précis !) que
   $$P_{Z_1}(Y = n + 2) = P(Y = n + 1) \text{ et } P_{G_1}(Y = n + 2) = \frac{1}{3}P(Y = n)$$
   c) On pose $u_n = P(Y = n)$. A l'aide du système complet (Z_1, G_1), montrez que $\forall n \geq 2$,
   $$u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$$
   d) En déduire $P(Y = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   e) Question bonus : Y est une variable infinie, puisque $Y(\Omega) = [\![2; +\infty]\!]$. On admet qu'une telle variable admet une espérance, éventuellement infinie, donnée par
   $$E(Y) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} kP(Y = k)$$
   .
   Calculez $E(Y)$.

1. Les repas étant supposés indépendants, il s'agit ici d'une répétition d'expériences de Bernoulli, dont on compte les succès (ici : manger une gazelle). La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale :
   $$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)}$$
   D'après le cours, $\boxed{E(X) = \frac{2n}{3} \text{ et } V(X) = \frac{2n}{9}}$.
2. a) Avec les notations proposées, $A = G_1 \cap G_2$, et par indépendance, $P(A) = P(G_1)P(G_2) = \frac{4}{9}$.
   b) De même, $B = Z_1 \cap G_2 \cap G_3$ et, toujours via l'indépendance, $P(B) = \frac{4}{27}$.
   c) A partir de la formule, on a $P_{G_1}(C) = \frac{P(G_1 \cap C)}{P(G_1)} = \frac{P(G_1 \cap Z_2 \cap G_3 \cap G_4)}{P(G_1)} = P(Z_2 \cap G_3 \cap G_4) = \frac{4}{27}$. On peut aussi raisonner en considérant que cela revient à "décaller" l'expérience et donc à revenir à l'événement B.
   De même, $P_{Z_1}(C) = \frac{4}{27}$, et d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le s.c.e. (G_1, Z_1), on a
   $$\boxed{P(C) = \frac{1}{3}\frac{4}{27} + \frac{2}{3}\frac{4}{27} = \frac{4}{27}}$$
3. a) Comme $(Y = 2) = A$, $(Y = 3) = B$ et $(Y = 4) = C$, on a
   $\boxed{P(Y = 2) = \frac{4}{9}, \text{ et } P(Y = 3) = P(Y = 4) = \frac{4}{27}}$.
   b) Avoir la répétition au $n+2$-ème repas sachant que Z_1 a eu lieu revient à "recommencer" à zero et donc avoir la répétition au $n + 1$ eme repas, d'où $P_{Z_1}(Y = n + 2) = P(Y = n + 1)$
   D'autre part avoir $(Y = n + 2)$ sachant G_1 implique qu'au deuxième repas on a eu un zebre, puis que n repas plus tard a eu lieu la répétition, d'où, part indépendance des événements, $P_{G_1}(Y = n + 2) = P(Z_2)P(Y = n) = \frac{1}{3}P(Y = n)$.

c) On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événement $\{G_1, Z_1\}$ et ainsi

$$P(Y = n+2) = P(G_1)P_{G_1}(Y = n+2)+P(Z_1)P_{Z_1}(Y = n+2) = \frac{2}{3}\frac{1}{3}P(Y = n)+\frac{1}{3}P(Y = n+1)$$

avec les notations proposées, ceci donne

$$\boxed{u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n}$$

d) (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre deux, de polynome caractéristique $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{2}{9}$ et dont les racines sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Ainsi, il existe A et B réels tels que $u_n = A(-\frac{1}{3})^n + B(\frac{2}{3})^n$ et on trouve $A = \frac{4}{3} =$ et $B = \frac{2}{3}$ à partir de $u_2 = P(Y = 2)$ et $u_3 = P(Y = 3)$.
On en déduit la loi de Y : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$,

$$P(Y = n) = \frac{4}{3}(-\frac{1}{3})^n + \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n$$

e) Le retour de la somme du DM et du TD avec les clefs : la dérivée géométrique...
Posons $S_n = \sum_{k=2}^{n} kP(Y = k)$
Alors $S_n = \frac{4}{3}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{-1}{3}\right)^k + \frac{2}{3}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{-4}{9}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{-1}{3}\right)^{k-1} + \frac{4}{9}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$
Ainsi, $S_n = -\frac{4}{9}f'(\frac{-1}{3}) + \frac{4}{9}f'(\frac{2}{3})$ où $f'(x) = \sum_{k=2}^{n} kx^{k-1}$
Avec $f(x) = \sum_{k=2}^{n} x^k = x^2\frac{1 - x^{n-1}}{1 - x} = \frac{x^2 - x^{n+1}}{1 - x}$
On a donc $f'(x) = \frac{(2x - (n+1)x^n)(1 - x) + x^2 - x^{n+1}}{(1 - x)^2} = \frac{2x - x^2 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1 - x)^2}$
Ici, on peut tout remplacer et souffrir... ou bien cibler la question : on veut la limite de tout ça quand $n \to +\infty$. Comme $|-\frac{1}{3}| < 1$ et $|\frac{2}{3}| < 1$, par croissance comparée, toutes les termes à la puissance n ou $n + 1$, même multipliés par n, tendent vers 0.
Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} f'(-\frac{1}{3}) = -\frac{7}{16}$ et $\lim_{n\to+\infty} f'(\frac{2}{3}) = 8$
On en déduit $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\frac{4}{9} \times (-\frac{7}{16}) + \frac{4}{9} \times 8 = \frac{135}{36} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}$.
Ainsi, $\boxed{E(Y) = \frac{45}{12}}$.
En moyenne, la répétition aura lieu en moins de 4 repas, ce qui est assez cohérent avec l'énoncé où l'on attrape des gazelles assez souvent....

Exercice 6 : que s' il vous reste du temps : pas de points si le reste n'est pas fait

Dans une population de r personnes ($r \in \mathbb{N}^*$), chaque individu fait appel à un médecin choisi au hasard dans une liste de n ($n \in \mathbb{N}^*$) médecins. On suppose que les choix se font tous de manière indépendante.
Pour tout $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire représentant le nombre de personnes qui vont consulter le $i$ème médecin.

1. Déterminez la loi commune à toutes les variables aléatoires X_i.
2. Préciser leur espérance et leur variance.
3. Ces variables sont-elles indépendantes ?
4. Pour $i \neq j$, déterminez la loi de $X_i + X_j$, son espérance et sa variance.
5. En déduire $cov(X_i, X_j)$.

1. Chaque personne peut faire appel ou non au medecin numero i avec une probabilité de $\frac{1}{n}$: c'est un comptage de succès dans la répétition de r épreuves succès/echec, de manière indépendante, et donc $\boxed{X_i \sim \mathcal{B}(r, \frac{1}{n})}$.
2. C'est le cours : $E(X_i) = \frac{r}{n}$ et $V(X_i) = \frac{r(n-1)}{n^2}$

3. Il n'y a pas indépendance, car deux medecins différents ne peuvent pas avoir simultanément n patients : ainsi $(X_i = n) \cap (X_j = n) = \emptyset$ alors que $P(X_i = n) \neq 0$ et $P(X_j = n) \neq 0$.
4. C'est le même raisonnement que la question a), en regroupant les deux medecins : la probabilité d'un succès est désormais $\frac{2}{n}$.

$$X_i + X_j \sim \mathcal{B}(r, \frac{2}{n})$$

   Ainsi, $E(X_i + X_j) = \frac{2r}{n}$ et $V(X_i + X_j) = \frac{2r(n-2)}{n^2}$
5. On a $V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2cov(X_i, X_j)$ On en déduit

$$cov(X_i, X_j) = \frac{1}{2}(V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j) = -\frac{r}{n^2}$$