TRAVAUX PRATIQUES n° 14
Méthodes numériques

Dans ce TP, on approche une intégrale (méthodes des rectangles et des trapèzes) puis une racine d'équation (Newton et dichotomie). Les formules sont celles du chapitre 10 du cours.

On rappelle qu'une fonction Python peut être passée en argument d'une autre fonction : si `f` est définie par `def f(t): ...`, on peut appeler `rectangles_gauche(f, 0, 1, 100)`.

Dans toute la suite, on pose $h = (b-a)/n$ et $x_k = a + kh$.

Exercice 1 (*Rectangles*) :

1) Écrire une fonction `rectangles_gauche(f, a, b, n)` renvoyant

$$R_n^{\mathrm{g}} = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh).$$

2) Écrire une fonction `rectangles_droite(f, a, b, n)` renvoyant

$$R_n^{\mathrm{d}} = h\sum_{k=1}^{n} f(a+kh).$$

3) Écrire une fonction `rectangles_milieu(f, a, b, n)` renvoyant

$$R_n^{\mathrm{m}} = h\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\left(k+\tfrac{1}{2}\right)h\right).$$

4) On sait que $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi$. On utilisera

```
def f(t):
    return 4 / (1 + t**2)
```

Comparer les trois méthodes pour $n = 10$, 100 et 1000 avec la valeur de π (module `math`).

Exercice 2 (*Trapèzes*) :

1) Écrire une fonction `trapezes(f, a, b, n)` renvoyant

$$T_n = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right).$$

2) Vérifier numériquement que T_n est la moyenne de R_n^{g} et R_n^{d}.
3) Reprendre l'approximation de π : pour $n = 100$, comparer l'erreur des rectangles à gauche et celle des trapèzes.

Exercice 3 (*Newton*) : La méthode de Newton construit la suite $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ jusqu'à ce que $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

1) Écrire une fonction `newton(f, fprime, x, eps)` qui renvoie une approximation d'une racine de `f`. On part de la valeur initiale `x` et on itère tant que $|x_{n+1} - x_n| \geqslant \varepsilon$. On pourra limiter le nombre d'itérations (par exemple à 100) pour éviter une boucle infinie.
2) Approcher $\sqrt{2}$ comme racine de $g(x) = x^2 - 2$ en partant de $x = 1$ et $\varepsilon = 10^{-12}$.
3) Combien d'itérations sont nécessaires ? (Faire afficher ou compter les termes successifs.)

Exercice 4 (*Comparaison avec la dichotomie (pour aller plus loin)*) : On a vu au TP sur les tris une recherche par dichotomie dans une liste. On adapte l'idée pour approcher une racine de $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ (on suppose $f(a)f(b) < 0$) : à chaque étape on coupe l'intervalle en deux et on retient le sous-intervalle où f change de signe.

Pseudo-code :

```
"""
def dichotomie(f, a, b, eps) :
    tant que b - a >= eps :
        m = (a + b) / 2
        si f(a) * f(m) <= 0 :
            b = m
        sinon :
            a = m
    retourner (a + b) / 2
"""
```

Écrire `dichotomie(f, a, b, eps)` et comparer, sur $g(x) = x^2 - 2$ et $[0, 2]$, le nombre d'itérations de la dichotomie et de Newton pour la même précision $\varepsilon = 10^{-12}$.