MP2I du lycée Victor Hugo de Besançon,
Année scolaire 2024/2025.

DL n° 3.

Lundi 12 mai.

À rendre le mercredi 21.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^n(t) e^{x\cos(t)} \mathrm{d}t \end{array}.$$

1. Dans cette question, on veut montrer que la fonction f_0 est dérivable. On fixe $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Soit $t \in \mathbb{R}$, et soit $\begin{array}{rccc} \varphi_t : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{x\cos(t)} \end{array}$.
      i. Montrez que $\varphi_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et déterminez φ_t' et φ_t''.
      ii. Montrez qu'il existe une fonction $\alpha_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \varphi_t(x) = \varphi_t(a) + (x-a)\varphi_t'(a) + \alpha_t(x) \\ |\alpha_t(x)| \leqslant \frac{(x-a)^2}{2} e^{|x|+|a|} \end{cases}.$$
   (b) En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_0(x) = f_0(a) + (x-a) f_1(a) + \varepsilon(x) \\ |\varepsilon(x)| \leqslant \frac{(x-a)^2}{2} e^{|x|+|a|} \end{cases}.$$
   (c) Montrez que f_0 est dérivable en a, et que $f_0'(a) = f_1(a)$.
2. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f_n' = f_{n+1}$. Qu'en déduit-on pour f_0 ?
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   (a) Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n(t) e^{x\cos(t)} \mathrm{d}t$.
   (b) Montrez que $f_0(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ch}(x\cos(t))\mathrm{d}t$ et que $f_1(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\mathrm{sh}(x\cos(t))\mathrm{d}t$.
   (c) Montrez que si $x \geqslant 0$, alors $f_0(x) \geqslant \frac{2}{3}\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$ et $f_1(x) \geqslant \frac{1}{3}\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)$.
4. Étudiez les variations de f_0 et donnez l'allure de sa courbe représentative.
5. Montrez que f_0 est solution de l'équation différentielle $xy'' + y' - xy = 0$.
6. Montrez que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $nf_n(0) = (n-1)f_{n-2}(0)$.
7. En déduire la valeur de $f_n(0)$.
8. Montrez que f_0 admet un développement limité en 0 à tout ordre, et déterminez-le.