TD n° 30.

Fonctions de deux variables réelles.

Exercice 1 Déterminez les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$,

1. $f(x,y) + f(y,z) + f(z,x) = 0$.
2. $f(x, y+z) = f(x+y, z)$.
3. $f(x,y) + f(z,t) = f(x,z) + f(y,t)$.

Exercice 2 Étudiez la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2+y^2 > 1, \\ -\dfrac{1}{2}x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de la droite d'équation $y = x$ par

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y,\ f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}.$$

Peut-on prolonger f par continuité à $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4 Étudiez l'existence de dérivées partielles pour les fonctions suivantes :

1. $(x,y) \longmapsto \sup(|x|, |y|)$;
2. $(x,y) \longmapsto |x| + |y|$;
3. $(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x^2 + \sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 5 Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculez les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $g(x,y) = f(y,x)$;
2. $g(x) = f(x,x)$;
3. $g(x,y) = f(y, f(x,x))$;
4. $g(x) = f(x, f(x,x))$.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrez que f admet en $(0,0)$ une dérivée suivant tout vecteur mais qu'elle n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est-elle continue ? Est-elle de classe C^1 ?

Exercice 8 Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Déterminez dans chacun des cas suivants l'ensemble des fonctions f de classe C^1 (ou C^2) sur $\mathbb{R}^2$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on ait :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$;
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(x)$;
3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(y)$;

Exercice 9 Déterminez toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy,$$

en posant $u = x$ et $v = 3x - 2y$.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Montrez que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 Étudiez la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| > y \\ y^2 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 12 Étudiez les extremums des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^3 + y^3$ sur $\mathbb{R}^2$;
2. $f(x,y) = x^2 + y^2 + \sin(x^2+y^2)$ sur $[-1,1]^2$;
3. $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6$ sur $\mathbb{R}^2$;
4. $f(x,y) = e^{x\cos y}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13 Montrez que la fonction $f : (x,y) \longmapsto xe^y + ye^x$ admet un unique point critique, mais aucun extremum sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 14 Déterminez $\max\{xyz \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x+y+z = 1\}$.