SUITES ET SÉRIES

Épreuves orales

I. Séries numériques

1 *CCINP MP (exercices 6, 7 et 8)*
Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{n^n}\quad,\quad \sum_{n\geqslant 2}\frac{((-1)^n+\mathrm{i})\ln(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}\quad,\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n e^{-\alpha n}}{n}\ \text{(discuter selon } \alpha\in\mathbb{R})$$

2 *CCINP MP (exercice 5)*

1. On considère la série de terme général $u_n=\dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n\geqslant 2$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.
   (a) **Cas** $\alpha\leqslant 0$
   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
   (b) **Cas** $\alpha>0$
   Étudier la nature de la série.
   Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\left(e-(1+\frac{1}{n})^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

3 *CCINP*
Soit a et b deux réels tels que $0<a<b$ et une suite de réels u_n strictement positifs tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n+a}{n+b}$.

1. Donner, sous sa forme la plus simple possible, un équivalent de $\ln\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)=-\infty$ et en déduire que (u_n) tend vers 0.
2. On pose $\alpha=b-a$, $v_0=u_0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=n^\alpha u_n$.
   Montrer que la série $\sum\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge.
   Montrer qu'il existe un réel A non nul tel que $u_n\sim\dfrac{A}{n^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$.
   Étudier la convergence de $\sum u_n$.
3. On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que sa somme vaut $u_0\dfrac{b-1}{b-1-a}$.

4 *Mines-Ponts*
Étudier en fonction de $a>0$ la convergence de la série de terme général $u_n=\dfrac{n^a}{\displaystyle\prod_{p=1}^{n}(1+a^p)}$.

5 *Mines-Ponts*
Étudier la convergence de la série de terme général $U_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^\alpha+(n-p)^\alpha}$ pour $\alpha\in\mathbb{R}_+$.

6 *CCINP*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $a_n = H_n - \ln n$.
   Montrer qu'il existe $\alpha < 0$ tel que $\dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\alpha}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   En déduire que la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ converge puis que la suite (a_n) converge.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(\sqrt{n} u_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2} a_n + \sum_{k=1}^{n} w_k$ où w_k est le terme d'une série convergente.
   En déduire que la nature de la série $\sum u_n$.
4. Soit $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)$.
   Montrer que la suite (v_n) est convergente et que sa limite est nulle si et seulement si $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$.

7 *Mines-Ponts*

Nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \sin(\pi\sqrt{n^2 + 2n + 2})$.

8 *ESPCI*

Soit (u_n) une suite réelle décroissante et positive.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge.

9 *ENS*

1. Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes strictement positifs telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.
   On suppose que $\sum b_n$ converge. Montrer que $\sum a_n$ converge.
2. Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \ell \in \mathbb{R}$.
   Montrer que :
   a) si $\ell > 1$ alors $\sum a_n$ converge, b) si $\ell < 1$ alors $\sum a_n$ diverge, c) si $\ell = 1$ alors les deux cas sont possibles.
3. Soit $a > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$.
   Étudier la convergence de $\sum a_n$.

10 *ENS*

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On suppose que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et que la série de terme général b_n est divergente.
On suppose que la suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note s sa limite.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$.
Montrer que la suite $\left(\dfrac{A_n}{B_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s.

II. Suites de fonctions

$\boxed{11}$ *CCINP MP (exercice 9)*

On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

$\boxed{12}$ *CCINP MP (exercice 10)*

On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{13}$ *CCINP*

Soit $a > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$, puis sur $[0, \alpha]$ où $\alpha \in [0, 1[$.

$\boxed{14}$ *Centrale*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose $u_n(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (1 + x^{2^k})$.
Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]-1, 1[$ et préciser sa limite simple.

III. Séries de fonctions

$\boxed{15}$ *CCINP MP (exercice 8)*

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
2. Étudier la convergence normale sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
3. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

$\boxed{16}$ *Mines-Télécom*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $g_n(x) = \sin x \big(\cos x\big)^n$.

1. Étudier les variations de g_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto x g_n(x)$.
3. Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

$\boxed{17}$ *Mines-Ponts*

On fixe $\alpha > 0$. On pose $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $u_n : x \mapsto \sin^n x \cos^\alpha x$.

Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ sur I.

$\boxed{18}$ *CCINP*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)}. \end{array}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

   On pose $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

2. (a) La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?
   (b) Montrer que pour tout $a > 0$, la série converge normalement sur $[a, +\infty[$.
   En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n(x) - R_{2n}(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}(1+2nx^2)}$.
   (b) En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
4. On admet (ε) :

   $$\forall x > 0,\ 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant S(x) \leqslant 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+x^2}.$$

   Montrer que S n'est pas continue en 0.
5. Démontrer (ε).

$\boxed{19}$ *CCINP*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\alpha^n}{n!}\cos(nx)$ et $U(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Donner le développement en série entière de exp et son rayon de convergence.
2. Montrer que la fonction U est bien définie sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction U est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (sans calculer U).
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$U(x) = \exp(\alpha\cos(x))\cos(\alpha\sin(x)).$$

5. On pose $V(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.
   Montrer que V est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer V.
6. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)U(x)\mathrm{d}x$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
7. Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{20}$ *CCINP MP (exercice 14)*

Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n2^n} = \displaystyle\int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de cette somme.

21 *Mines-Ponts*

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

IV. Séries entières

22 *CCINP, Centrale, CCINP MP (exercice 20)*

1. Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \cos(n) x^n \ , \ \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+1} \ , \ \sum \ln(n) x^n.$$

2. Trouver le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2 - 3n + 1}{n!} x^n$ et calculer sa somme.

3. Trouver le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$ et calculer sa somme.

23 *CCINP MP (exercice 24)*

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

3. (a) Déterminer $S(x)$.

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \ \ f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \ \text{ si } x > 0, \ \ f(x) = \cos\sqrt{-x} \ \text{ si } x < 0.$$

   Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f^{(p)}(0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

24 *Mines-Télécom*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)} u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant n + 1$ et donner le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.

2. Pour tout $x \in]-R, R[$, on note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

   Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a $(2 - x) S'(x) - 2S(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$.

3. Proposer une méthode permettant de déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{25}$ *CCINP*

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \exp(\exp(x) - 1)$.
On admet le développement limité en 0 suivant : $\varphi(x) = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$.

1. Calculer $\varphi^{(n)}(0)$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.
2. On définit la suite (P_n) par : $P_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k$.
   Calculer P_1, P_2 et P_3.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \leqslant n!$.
4. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n}{n!} x^n$.
   Montrer que le rayon de convergence R de f est différent de 0.
5. Prouver que pour tout $x \in]-R, R[$, $f'(x) = e^x f(x)$.
6. En déduire le développement en série entière de φ.

$\boxed{26}$ *Mines-Ponts*

1. Développer la fonction arccosinus en série entière sur $]-1, 1[$.
2. Ce développement est-il valable sur $[-1, 1]$?

$\boxed{27}$ *Mines-Ponts*

Pour tout $x \in [-1, 1]$, on pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.
Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et qu'elle est développable en série entière.

V. Suites numériques

$\boxed{28}$ *CCINP*

On donne $u_0 \in]-1, 0[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x^2 + x$ et montrer que pour tout $x \in]-1, 0[$, $f(x) \in]-1, 0[$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-1, 0[$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. (a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge et donner sa somme en fonction de u_0.
   (b) Étudier la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$.
   (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite ℓ.
   (b) On admet que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \ell$.
   En déduire un équivalent de u_n puis la nature de la série $\sum u_n$.
   (c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \ell$ (*théorème de Cesàro*).

$\boxed{29}$ *Mines-Télécom, Mines-Ponts*

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. Prouver la convergence de cette suite et donner sa limite.
2. En étudiant $u_{n+1} - u_n$, étudier la convergence de la série $\sum u_n^3$.
3. Donner un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.
   Indication : On pourra commencer par chercher un réel α tel que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ converge vers une limite non nulle puis utiliser le théorème de Cesàro.

$\boxed{30}$ *CCINP*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n =]-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n[$.
On définit la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ sur la réunion des I_n.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de tan au voisinage de 0.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique x_n dans I_n tel que $f(x_n) = 0$.
   (b) Montrer que $x_n \sim n\pi$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \arctan(x_n)$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.
   (b) Justifier que $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right) \sim y_n - \frac{\pi}{2}$.
   (c) Montrer que $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n\pi}\right) = \dfrac{x_n \tan(\frac{1}{n\pi}) - 1}{x_n + \tan(\frac{1}{n\pi})}$.
4. Montrer qu'il existe des réels a, b, c et d tels que :

$$x_n = an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$