SUITES ET SÉRIES

Épreuves orales - Sujet fait en classe

Exercice 1 (CCINP)

On pose pour tout $x > 0$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Montrer que la fonction S est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. (a) Soit $a > 0$. Montrer que pour tout $x > a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(a+n)^2}.$$
   (b) Montrer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. (a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xS(x) + xS(x+1) = 1.$$
   (b) En déduire que :
$$S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$
4. Donner le tableau de variations de S en précisant les limites.
5. Montrer que $S(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

Exercice 2 (CCINP)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 2$.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 2$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$.

1. Montrer que si A est diagonalisable alors $A^n \neq 0_n$.
2. Montrer que si $A^n \neq 0_n$ alors A est diagonalisable.