DS07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
- Les candidats sont fermement invités à *encadrer les résultats*, les schémas doivent être clairement annotés afin de définir les grandeurs pertinentes.
  (pénalité possible jusqu'à 10% de la note finale)
- Ce devoir comporte trois parties totalement indépendantes divisées en de nombreuses questions souvent indépendantes. Néanmoins une lecture attentive de l'ensemble de l'énoncé s'impose car des indications numériques sont progressivement indiquées et valables pour la suite du problème.
- Les résultats numériques demandés seront fournis avec un nombre de chiffres significatifs adéquat en unités SI.

Contextualisation du problème L'histoire de la mesure du temps remonte aux premières civilisations (Égypte, Chine). La mesure du temps a rapidement été une préoccupation importante, notamment pour organiser la vie sociale, religieuse et économique des sociétés.

Les phénomènes périodiques du milieu où l'Homme vivait – comme le déplacement quotidien de l'ombre, le retour des saisons ou le cycle lunaire – ont servi de premières références.

Mais progressivement, l'Homme s'est inspiré de phénomènes physiques, dont il avait remarqué le caractère périodique, pour concevoir et mettre au point des dispositifs de mesure du temps de plus en plus précis, ainsi que des unités adaptées.

En 1657, l'invention de la première horloge à pendule révolutionne l'horlogerie. Elle est le résultat des travaux de Christiaan Huygens (1629-1695), mathématicien, physicien et astronome hollandais, dont le père fut un ami de Descartes et qui eut connaissance des travaux de Pascal et Pierre de Fermat. À partir des découvertes de Galilée (1564-1642) sur les propriétés des oscillations du pendule, il eut l'idée de remplacer le foliot[1] par un pendule ; c'est l'horloger Salomon Coster qui a réalisé la première horloge à pendule à partir des indications de Huygens.

L'invention du spiral réglant, sorte de ressort, par le même Huygens, permet la réalisation de la première montre à spiral par Isaac Thuret, maître-horloger, en 1675. La précision de la montre est ainsi multipliée par 5. À la fin du XVII^e siècle est mise au point l'indication des heures et des minutes grâce à deux aiguilles concentriques qui font le tour en 12 heures et une heure, respectivement. Le grand horloger londonien Daniel Quarre (1649-1724) créa notre cadran, qui sera modifié plus tard par l'ajout de l'aiguille des secondes.

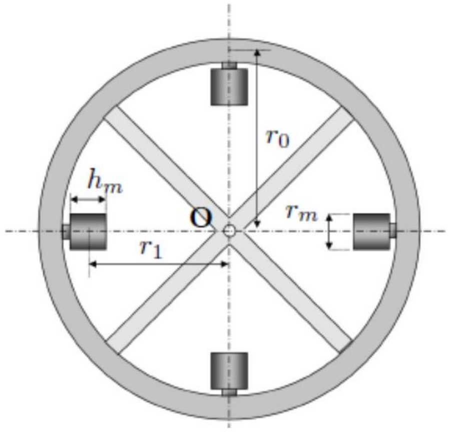
1. foliot : balancier horizontal utilisé dans les premières horloges au XIV^e siècle.

Partie I

Étude d'une montre à ressort spiral

Le temps se mesure ici par le nombre d'oscillations accomplies par un oscillateur mécanique régulé. Dans une montre mécanique bracelet, l'énergie est fournie au mécanisme (cf. figures ci-dessous) par un ressort appelé ressort de barillet, ou ressort moteur. Ce ressort, contraint lors du remontage de la montre, constitue la réserve d'énergie du mécanisme.

Le balancier (cf. figure ci-contre) oscille sous l'action d'un ressort spiral. L'équipage mobile est constitué d'une couronne circulaire de masse m_0 et de rayon moyen r_0. Cette couronne très fine est lestée de quatre masselottes identiques cylindriques quasi ponctuelles de masse m_1. La distance r_1 du centre de gravité des masselottes au centre O de la couronne est réglable. On peut donc considérer que ces masselottes sont des points matériels situés à une distance r_1 de l'axe de rotation Δ passant par O et perpendiculaire au plan de la figure. Les quatre rayons sont de masse négligeable.



Données : $m_0 = 1{,}5 \times 10^{-5}$ kg, $m_1 = 3{,}0 \times 10^{-6}$ kg, $r_0 = 5{,}0 \times 10^{-3}$ m, $r_1 = 4{,}0 \times 10^{-3}$ m.

Le ressort spiral est composé d'un ruban de longueur L, de largeur $\ell = 2{,}0 \times 10^{-4}$ m et d'épaisseur $e = 5{,}0 \times 10^{-5}$ m. Dans la position de repos du ressort, prise comme référence angulaire, aucun couple n'est exercé sur le balancier. Le ressort spiral est fixé à une extrémité sur l'axe central et à l'autre extrémité sur le balancier supportant le mouvement. On note Γ_z la valeur du moment exercé par le ressort sur l'équipage mobile pour une rotation d'un angle θ par rapport à sa position de repos. On donne la relation

$$\Gamma_z = -\frac{1}{12}\frac{\mathrm{E}\ell e^3}{\mathrm{L}}\theta$$

Le coefficient E appelé module de Young caractérise l'élasticité du matériau en régime linéaire. On prendra $\mathrm{E} = 2 \times 10^{11}$ SI.

1. Préciser l'unité du moment Γ_z. En déduire celle du module de Young E.
2. Le moment d'inertie de l'équipage mobile par rapport à l'axe de rotation Δ (hors ressort) se met sous la forme $\mathrm{I}_\Delta = m_0 {r_0}^2 + \beta m_1 {r_1}^2$. Interpréter les deux termes qui apparaissent dans cette expression et préciser la valeur de et β.
3. Énoncer le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe de rotation Δ. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'angle de rotation $\theta(t)$. Les frottements avec l'air sont négligés et au niveau de l'axe, on a une liaison pivot.
4. Résoudre cette équation différentielle en montrant que $\theta(t)$ est une fonction T_0 périodique.
   On donnera l'expression de T_0 en fonction de E, ℓ, L, e, m_0, m_1, r_0 et r_1.
5. Quelle longueur L faut-il donner au ressort spiral pour obtenir une fréquence $f_0 = 8{,}0$ Hz d'oscillations ?
6. On souhaite ajuster la période d'oscillation de l'équipage mobile. Sur quels paramètres mécaniques peut-on agir pour augmenter cette période ? Même question pour la diminuer.
7. Par rapport à un fonctionnement idéal, la montre avance de 5 s au bout d'une journée. On cherche à agir sur la distance r_1. Faut-il augmenter ou diminuer r_1 ? Calculer le déplacement δr_1 à appliquer sur les quatre masselottes pour corriger cette déviation.
8. Expliquer alors pourquoi l'horloger ne règle pas la fréquence par les masselottes mais par l'ajustement de la longueur utile du ressort spiral.

Partie II

Premiers pas dans la théorie cinétique des gaz

En 1858 Clausius donnant suite à l'idée de Joule (1848), concernant le caractère énergétique de la « chaleur », introduit la notion d'états d'équilibre et de valeur moyenne.

Suite à une critique de ce modèle, par Buys-Ballot qui se demande : « si la vitesse est de l'ordre de quelques centaines de mètres par seconde, pourquoi une odeur met-elle des dizaines de secondes à se répandre dans une pièce ? », Clausius, en réponse, introduit le libre parcours moyen, qui se définit comme la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions successives. **Cette grandeur est suffisamment petite pour expliquer une diffusion lente mais également suffisamment grande pour préserver le modèle cinétique**.

En 1860, Maxwell modélise les vitesses des atomes d'un gaz monoatomique en équilibre thermique à la température T (exprimée en kelvin) par une distribution. En particulier, on peut alors définir une vitesse quadratique moyenne v^*, pour chaque atome de masse m, par la relation :

$$\frac{1}{2}mv^{*2} = \frac{3}{2}k_\mathrm{B}\mathrm{T}$$

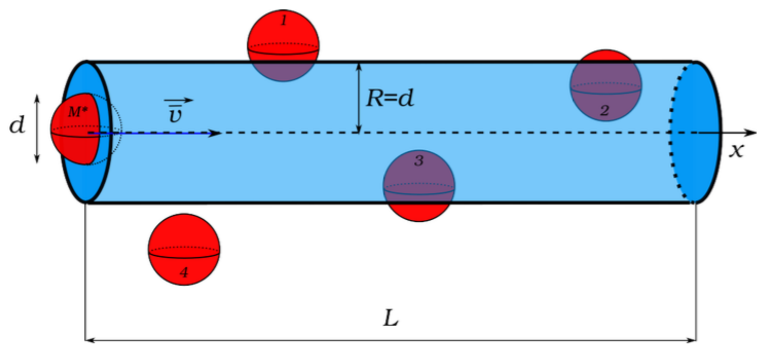
avec k_B la constante de Boltzmann définie par $k_\mathrm{B} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{N_A}}$ et $\mathrm{N_A} = 6{,}022.10^{23}$ mol^{-1} le nombre d'Avogadro.
Dans toute cette partie on raisonnera sur le gaz Argon de masse molaire $\mathrm{M_{Ar}} = 39{,}95$ g/mol et de rayon atomique $r = 80{,}0$ pm.

1. En appliquant la relation précédente exprimer la vitesse quadratique moyenne d'un atome d'argon (Ar) en fonction de R, T et $\mathrm{M_{Ar}}$, masse molaire de l'argon. Calculer sa valeur numérique pour l'argon à 300 K.

Nous allons maintenant revenir au libre parcours moyen introduit par Clausius afin de le relier aux paramètres d'état d'un gaz ; en particulier, sa densité volumique $n_\mathrm{V} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{V}}$ avec N le nombre de molécules et V le volume qu'elles occupent. Si les molécules d'un gaz n'étaient vraiment que des points matériels, elles n'entreraient jamais en collision, les unes avec les autres. En fait, la taille des molécules étant non nulle, de multiples collisions viennent ralentir leur course et modifier leur trajectoire (a priori rectiligne, pour simplifier).

2. Pour un gaz parfait, à la pression P et à la température T, exprimer sa densité volumique n_V en fonction de P, T, R et $\mathrm{N_A}$.
3. De manière qualitative, expliquer comment varie le libre parcours moyen ℓ_m
   - lorsque la densité volumique n_V du gaz augmente.
   - lorsque la taille des molécules augmente.

Nous allons maintenant établir une expression du libre parcours moyen. Pour cela, on suppose que le gaz est constitué d'atomes semblables à des sphères rigides de diamètre d. Ces atomes sont répartis de façon homogène dans un volume quelconque, avec une densité volumique moyenne n_V. On poursuit le raisonnement sur un atome particulier, que l'on nommera dans la suite M* : celui situé à gauche sur la figure ci-dessous. On suppose qu'il se déplace à la vitesse quadratique moyenne dans la direction (Ox), correspondant à l'axe du cylindre ; tandis que les autres atomes demeurent immobiles. Sur ce schéma, la ligne pointillée de longueur L représente donc la trajectoire rectiligne que peut accomplir cet atome, pendant Δt, tant qu'il ne subit aucune collision. Un atome est compté DANS le cylindre si son centre s'y trouve.



4. Avec quels atomes de la figure l'atome particulier M^* va-t-il entrer en collision sur son trajet ?
5. Quelle est l'expression du nombre N^* d'atomes pouvant effectuer un choc avec l'atome M^* durant l'intervalle de temps Δt, en fonction de d, n_V , v^* et Δt ?
6. Finalement en déduire l'expression du libre parcours moyen ℓ_m de l'atome M^* dans le gaz en fonction de n_V et de d.
7. Calculer numériquement ℓ_m pour l'Argon à 300 K et sous une pression de 1,00 bar.
8. Justifier la phrase en **gras** citée dans l'introduction de cette partie.

Partie III

NASA's Mars Exploration Program : le voyage entre la Terre et Mars

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains.

Dans toute cette partie du problème, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe a des ellipses. On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

Données utiles

Masse du Soleil	$M_S = 2,00.10^{30} kg$
Demi-grand axe de l'orbite de la Terre	$a_T = 150.10^6 km$
Demi-grand axe de l'orbite de Mars	$a_M = 22810^6 km$
Constante de gravitation universelle	$G = 6,67.10^{-11}$SI
Champ de pesanteur terrestre	$g = 9.81 m.s^{-2}$
Période de révolution de la Terre autour du Soleil	$T_T = 365 jours$
Période de révolution de Mars autour du Soleil	$T_M = 687 jours$

III.1 Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

1. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle G ainsi que son unité dans le système international.
2. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ en O, centre du Soleil, d'un objet de masse m est une constante du mouvement à une condition que l'on précisera.
3. On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_z$ tel que $\vec{L}_O = L_O\vec{e}_z$. Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de L_O et m. Pourquoi est-ce que C est nommée « la constante des aires » ?
4. Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R, la vitesse V de l'objet en fonction de G, M_S, R et m. Calculer les valeurs numériques de V_T, la vitesse orbitale de la Terre et de V_M, celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

III.2 Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

5. Déduire l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G, M_S, R et m.
6. Exprimer la période de rotation T de l'objet en fonction G, M_S et R (troisième loi de Kepler).

Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe de la trajectoire.

III.3 Voyage aller Terre - Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

7. Représenter, sur la figure A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann).

La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).

8. Au départ de l'orbite de la Terre, exprimer en fonction de V_T, a_M et a_T la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert. En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

9. Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.
10. Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t = 0) - \theta_T(t = 0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure A du document réponse.
11. Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

Partie IV

Étude d'un gaz parfait

Pour tout le problème on note p, V, T les grandeurs d'état pression, volume, température d'un gaz. On note $C_{p,m}$ et $C_{V,m}$ les capacités thermiques molaires à pression et à volume constant et γ le rapport $\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}}$. Ces trois grandeurs seront considérées comme étant constante vis-à-vis de la température et de la pression.

IV.1 Quelques propriétés d'un gaz parfait

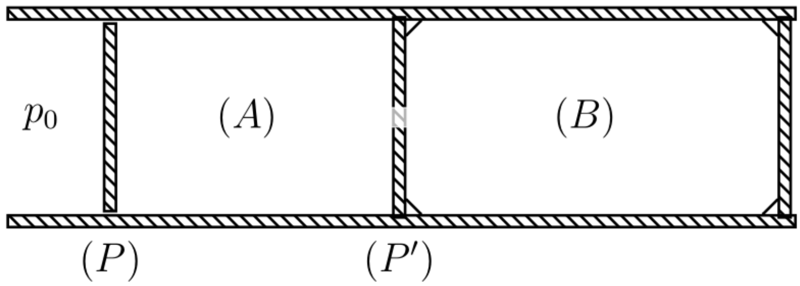
1. Rappeler l'équation d'état d'un gaz parfait ; on désigne par n le nombre de moles et par R la constante molaire des gaz parfaits.
2. Rappeler la relation qui lie la fonction d'état enthalpie H à la fonction d'état énergie interne U.
3. Montrer que $C_{p,m} - C_{V,m} = R$ (relation de Mayer pour les grandeurs molaires). Exprimer $C_{V,m}$ et $C_{p,m}$ en fonction de R et γ
4. n moles d'un gaz parfait évolue d'un état initial (p_0, V_0) jusqu'à un état final (p_1, V_1). Montrer que la variation d'énergie interne de ce gaz parfait au cours de cette transformation peut s'écrire $\Delta U = \frac{p_1 V_1 - p_0 V_0}{\gamma - 1}$.

IV.2 Transformation irréversible d'un gaz parfait

Un cylindre horizontal est fermé à une de ses extrémités par un piston qui peut coulisser sans frottements le long du cylindre. Le cylindre est séparé en deux compartiments (A) et (B) par une paroi fixe (P′) d'épaisseur négligeable.

Sur la face extérieure du piston s'exerce la pression p_0 uniforme et constante.

Dans la situation initiale, le compartiment (A) de volume V_A contient n moles d'un gaz parfait. Le compartiment (B) de volume V_B est initialement vide (n, V_A et V_B sont des données du problèmes et sont considérés comme connus). Les parois externes et le piston sont calorifugées.



1. Préciser la pression initiale p_A en fonction de p_0 en justifiant votre réponse, ainsi que la température initiale T_A en fonction de n, R, p_0 et V_A.
2. On perce un trou dans la paroi fixe (P′) et on cherche à décrire les caractéristiques du nouvel état d'équilibre que l'on supposera atteint. En analysant qualitativement le problème, faire un schéma des deux situations finales possibles selon la valeur de V_B par rapport à une valeur seuil $V_{B,s}$ qui sera déterminé dans les questions suivantes.
3. On suppose $V_B < V_{B,s}$. On note V_1 le volume total du gaz contenu dans le cylindre (A + B), T_1 la température, p_1 la pression dans l'état d'équilibre final (faire les deux schémas représenter les états initial et final).
   (a) Exprimer p_1 en fonction de p_0.
   (b) En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système { gaz + parois + piston + vide }, établir la relation $V_1 = V_A + V_B\frac{\gamma-1}{\gamma}$
   (c) Exprimer T_1 en fonction de p_0, V_A, V_B, γ, n et R.
   (d) Déterminer $V_{B,s}$ en fonction de V_A et γ.
4. On suppose $V_B > V_{B,s}$ et on indice par 2 les paramètres d'états dans l'état d'équilibre final.
   (a) Faire les deux schémas représentant les états initial et final.
   (b) Déterminer V_2 en fonction de V_B.
   (c) En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système { gaz + parois + piston + vide }, établir la relation $T_2 = \gamma T_A$.
   (d) En déduire p_2 en fonction de γ, p_0, V_A et V_B.

Question 7 et 10

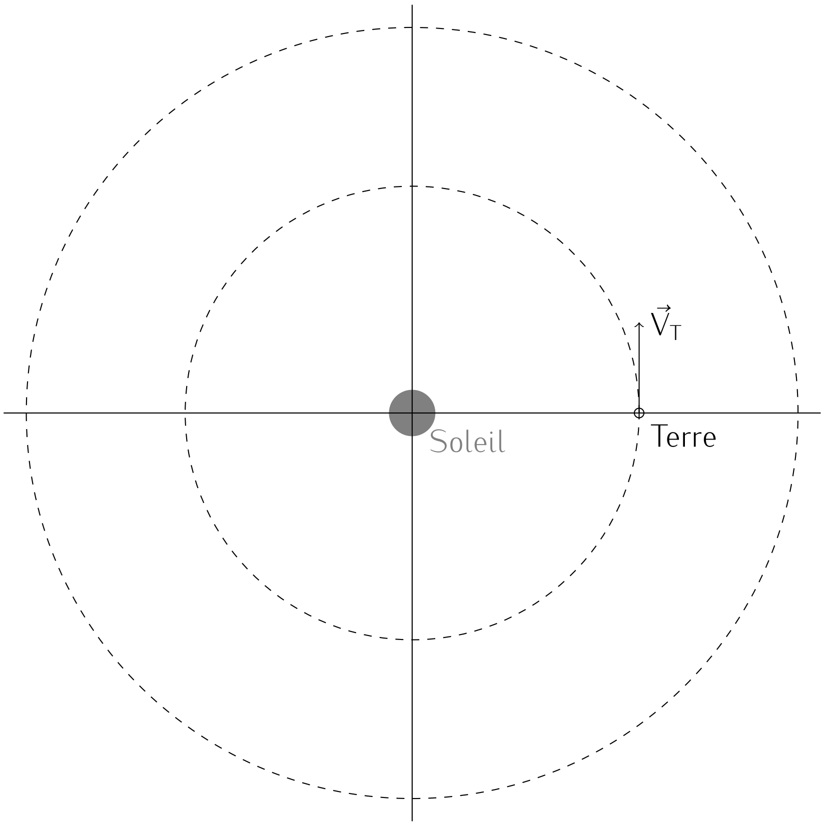


Figure A