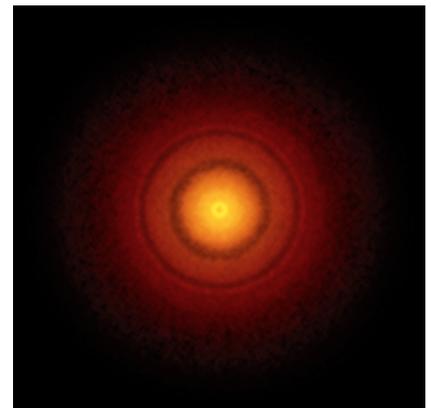


Conseils :

- Lisez attentivement l'énoncé du début à la fin et choisissez **ensuite** par quel problème commencer (aucun ordre n'est imposé).
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).
Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

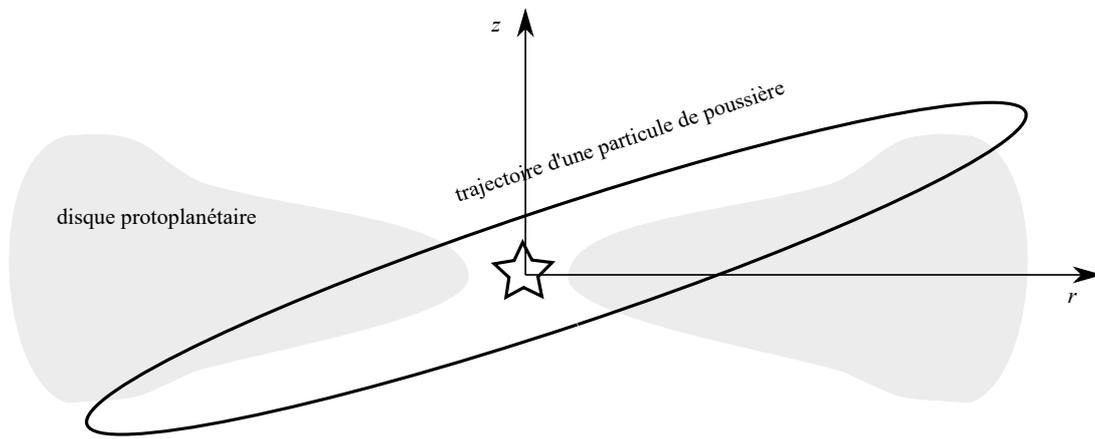
DISQUE PROTOPLANÉTAIRE

Il existe, à ce jour, deux scénarios possibles pour la formation des planètes. Dans le premier, les planètes se forment lorsque le nuage de gaz entourant une jeune étoile devient gravitationnellement instable et qu'il se fragmente pour former des protoplanètes gazeuses (comme Jupiter) en seulement mille à dix mille ans. Ce processus génère des planètes à grandes distances de leur étoile (>100 U.A, où 1 U.A. est une Unité Astronomique, soit la distance moyenne Terre-Soleil) avec des masses de 10 à 20 fois celles de Jupiter. La majeure partie des exoplanètes détectées jusqu'à présent, orbitent autour de leur étoile à des distances inférieures à 10 U.A. et ont des masses bien plus faibles. Dans ce cas, c'est le scénario dit d'accrétion qui entre en jeu au sein du disque protoplanétaire (photo ci-contre). Des grains de poussière microscopiques ($0,1$ à $1 \mu m$) se collent les uns aux autres lors de collisions jusqu'à former des cailloux centimétriques puis des protoplanètes. Ce sujet traite de ce scénario d'accrétion. Il est constitué de 4 parties, les parties 1 et 4 sont indépendantes des deux autres.



1 Sédimentation verticale de la poussière

Lors de la formation d'une étoile, les interactions gravitationnelles entraînent la rotation du nuage de gaz entourant celle-ci. Ce nuage prend alors la forme d'un disque, appelé disque protoplanétaire (voir schéma ci-dessous).



- Q1 1. On étudie le mouvement d'une particule de poussière au sein du nuage protoplanétaire dans un référentiel lié à l'étoile et supposé galiléen. On repère le mouvement de la particule dans les coordonnées cylindriques associées à une base $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$. Celle-ci évolue à rayon r constant et également à vitesse angulaire $\dot{\theta}$ constante. La force d'interaction gravitationnelle qu'elle subit de la part de l'étoile s'écrit : $\vec{F} = -\frac{GM_E m}{(r^2+z^2)^{3/2}} (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z)$, où M_E est la masse de l'étoile, m la masse de la poussière et G la constante gravitationnelle. Montrer qu'à r fixé, l'équation du mouvement vertical peut s'écrire de façon approchée sous la forme $\ddot{z} = -\omega^2 z$ dans le cas où le disque est considéré comme mince (*i.e.* son épaisseur est faible devant son rayon, $|z| \ll r$). Quelle doit-être la dimension de ω ? Le vérifier sur l'expression littérale trouvée.
- Q2 2. Comment s'appelle un système décrit par une telle équation? Peut-elle donner naissance à une sédimentation verticale de la poussière, c'est-à-dire à une accumulation de la poussière dans le plan $z = 0$?
- Q3 3. On ajoute au modèle précédent une force d'interaction entre la particule de poussière et le gaz. Cette force est une force de frottement fluide du type : $\vec{f}_v = -\beta v \vec{v}$, où \vec{v} est le vecteur vitesse **relative** de la particule par rapport au gaz. On considère toujours le cas $r = R = cste$, on peut raisonnablement ajouter que la particule de poussière et le gaz tourne autour de l'étoile à la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Montrer que dans ce cas l'équation différentielle qui régit le mouvement vertical de la particule est : $\ddot{z} = -\omega^2 z - \frac{\beta}{m} |\dot{z}| \dot{z}$.
- Q4 4. On peut résoudre analytiquement cette équation différentielle en introduisant les grandeurs $v_+ = \dot{z}$ si $\dot{z} > 0$ et $v_- = -\dot{z}$ si $\dot{z} < 0$. Montrer que v_- est solution de $v_- \frac{dv_-}{dz} = -\omega^2 z + \mu v_-^2$, où $\mu = \frac{\beta}{m}$. Quelle est la dimension de $\frac{1}{\mu}$?
- Q5 5. Montrer alors que $v_-^2 = A \exp(2\mu z) + \frac{\omega^2 z}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2}$, où A est une constante que l'on ne déterminera pas pour l'instant. On pourra poser $f = v_-^2$ et remarquer que $\frac{df}{dz} = 2v_- \frac{dv_-}{dz}$.
- Q6 6. Déterminer A dans le cas d'une particule partant de $z = z_0$ avec une vitesse verticale nulle, c'est-à-dire $v_-(z_0) = 0$.
- Q7 7. En déduire que l'altitude de rebroussement notée z_1 (c'est-à-dire l'altitude pour laquelle la vitesse verticale s'annule) est solution de $-\left(\frac{\omega^2 z_0}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2}\right) \exp(2\mu(z_1 - z_0)) + \frac{\omega^2 z_1}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2} = 0$.
- Q8 8. Que vaut approximativement l'altitude de rebroussement dans le cas où $z_0 \gg \frac{1}{\mu}$? (On montrera que le terme en exponentiel est négligeable). Cette situation correspond-elle à un arrêt rapide ou lent du mouvement vertical?
- Q9 9. On suppose désormais que la particule part d'une distance très grande devant $\frac{1}{\mu}$ et que z reste grand devant $\frac{1}{\mu}$ tout au long de la trajectoire. Montrer dans ce cas que $\dot{z} \simeq -\omega \sqrt{\frac{z}{\mu}}$.
- Q10 10. Résoudre cette équation différentielle en utilisant la méthode de séparation des variables, et montrer que $z = z_0 \left(1 - \frac{\omega t}{2\sqrt{\mu z_0}}\right)^2$.

- Q11 11. En déduire l'expression de $\dot{z}(t)$ et montrer que la particule s'arrête au bout d'un temps $t_1 = 2\frac{\sqrt{\mu z_0}}{\omega}$.
- Q12 12. Que vaut la position d'arrêt ($z(t_1)$)? Que vaut la vitesse initiale ($\dot{z}(t=0)$)? Commenter.
13. Dans le cas où $z_0 \ll \frac{1}{\mu}$, interpréter le fait que $z_1 \simeq -z_0$.
- Q13 Cette situation correspond à des oscillations de la particule de part et d'autre du plan $z = 0$ avec une amplitude lentement décroissante. Dans ce cas, on peut, comme dans les questions précédente résoudre l'équation du mouvement et on montre que l'amplitude décroît comme $\frac{1}{t}$.

Pour conclure cette partie, on vient de montrer qu'après une phase d'arrêt rapide (de l'ordre de $\frac{1}{\mu}$) la particule oscille autour du plan $z = 0$ avec une amplitude décroissante. Les particules de poussière finissent ainsi par se retrouver dans le plan $z = 0$.

2 Modèle d'accrétion simple

Après la sédimentation verticale commence une phase d'accrétion des grains de poussière. On considère un astre sphérique, appelé graine, de rayon R_G , en orbite autour d'une étoile. Cette graine se déplace dans le disque protoplanétaire qui est constitué d'un grand nombre de petits corps, répartis aléatoirement entrant en collision avec elle. On suppose que tous ces corps ont une même vitesse relative, v_r , par rapport à la graine. Comme le rayon de l'orbite de la graine est de l'ordre de 10^8 km et que la graine a une taille inférieure au km, on peut se contenter d'un modèle à une dimension, et on supposera que toutes les particules du disque protoplanétaire ont le même vecteur vitesse : $\vec{v}_r = v_r \vec{u}_x$. On notera n^* le nombre de particules par unité de volume, on négligera leur taille par rapport à la taille de la graine. De plus, on négligera les interactions gravitationnelles.

- Q14 1. Faire un schéma de la situation en représentant le volume contenant les corps entrant en collision avec la graine entre les instants t et $t + dt$.
- Q15 2. Combien de particules entrent en collision avec la graine entre les instants t et $t + dt$? On exprimera dN_{coll} en fonction de n^* , R_G , dt et v_r .
- Q16 3. On suppose que les particules du disque protoplanétaire ont une masse m , et que lors des collisions, elles se collent à la graine. Celle-ci restant sphérique avec une masse volumique $\rho_G = 500 \text{ kg.m}^{-3}$ constante. Exprimer la vitesse d'accrétion $\frac{dR_G}{dt}$ de la graine. En déduire que $R_G(t) = \frac{v_r n^* m}{4\rho_G} t$ si l'on considère $R_G \simeq 0$ à $t = 0$.
- Q17 4. Le disque protoplanétaire a une masse volumique $\rho_D = 5 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^{-3}$, la vitesse v_r vaut, en ordre de grandeur, 1 km/s. En déduire que le temps nécessaire pour que la graine atteigne une taille égale à la moitié de celle de la Terre (on rappelle $R_T = 6400 \text{ km}$) vaut $t_{1/2} = \frac{2R_T \rho_G}{v_r \rho_D}$. Faire l'application numérique.
- Q18 5. Les observations montrent que le temps de vie médian des disques protoplanétaires est compris entre 1 et 3 millions d'années¹. Peut-on valider le modèle précédent?

3 Modèle d'accrétion galopante

On choisit cette fois-ci de ne plus négliger l'interaction entre les particules du disque et la graine. On considère que la graine est au centre O d'un repère orthonormé d'un référentiel galiléen. Les particules (de masse m) du disque, sont cette fois-ci attirées par la graine de masse M . On étudie une particule ayant la vitesse \vec{v}_r à l'infini. On définit la grandeur $b = \frac{L}{mv_r}$, où \vec{L} est le moment cinétique en O de la particule.

- Q19 1. Faire un schéma de la situation et donner une signification géométrique à b .

- Q20 2. Montrer que, dans le référentiel lié à la graine, le mouvement de la particule est plan.
3. Que vaut l'énergie mécanique de la particule? Quelle est la nature de sa trajectoire dans le référentiel lié à la graine?
- Q21
- Q22 4. On repère la particule dans les coordonnées polaires. Montrer que son énergie mécanique peut s'écrire sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}$, avec $E_{p,eff} = \frac{1}{2}\frac{mb^2v_f^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$.
5. En déduire l'équation dont est solution la distance minimale d'approche r_{min} (i.e. la distance pour laquelle $\dot{r} = 0$). On ne cherchera pas à résoudre cette équation.
- Q23
- Q24 6. Redémontrer l'expression de la seconde vitesse cosmique, ou vitesse de libération, notée v_l .
- Q25 7. Montrer que r_{min} est solution de $r_{min}^2 + R_G\frac{v_f^2}{v_f}r_{min} - b^2 = 0$
- Q26 8. La graine ayant un rayon R_G non nul, montrer que la particule la heurte si $b^2 < R_G^2\left(1 + \frac{v_f^2}{v_l^2}\right)$.
- Q27 9. En vous aidant des questions de la partie II, calculer le nombre de particules entrant en collision avec la graine entre les instants t et $t + dt$.
- Q28 10. Exprimer, pour ce modèle, la vitesse d'accrétion $\frac{dR_G}{dt}$ en fonction de v_l , puis en fonction de R_G (Attention, M dépend de R_G ...).
- Q29 11. Résoudre l'équation différentielle pour obtenir $R_G(t)$ (on prendra $R_G(t=0) = 0$). On rappelle qu'une primitive de $\frac{1}{a^2+x^2}$ est $\frac{1}{|a|}\arctan\frac{x}{a}$.
- Q30 12. Pourquoi parle-t-on d'accrétion galopante? Estimer le temps de formation de la planète. Une modélisation plus complète du phénomène d'accrétion (prenant en compte par exemple, la déplétion en matière le long de la trajectoire de la protoplanète) donne un temps de formation typique compris en 1 et 10 millions d'années.

4 Une aide venue d'ailleurs

Le 19 Octobre 2017 un objet sombre a été découvert par le télescope Pan-STARR. Son excentricité étant supérieur à 1, sa trajectoire est hyperbolique signifiant qu'il ne provient pas du système solaire. Baptisé 1I/Oumuamua, il est le premier objet interstellaire détecté. (Un second, 2I/Borissov a été détecté le 30 Aout 2019.) Ces objets interstellaires sont des résidus d'anciens systèmes planétaires. Leur présence permettrait également d'expliquer la formation rapide des planètes. Dans cette partie, on cherche à évaluer leur nombre au sein du disque protoplanétaire.

1. Un amas d'étoile naît généralement au sein d'une nébuleuse. La formation des étoiles au voisinage du système solaire consomme 10 à 30% de la masse de la nébuleuse. La plupart des étoiles formées ont une masse de $0,5 M_\odot$, où M_\odot est la masse du soleil. Evaluer la masse d'une nébuleuse (en fonction de M_\odot) qui donnerait naissance à un amas de 5000 étoiles.
- Q31
2. Il existe une corrélation entre la masse d'une nébuleuse et sa taille² :
- Q32 $\log(M_{neb}) = 3,42 + 1,67 \log R_{neb}$, où M_{neb} est la masse de la nébuleuse exprimée en masse solaire et R_{neb} , la taille de la nébuleuse en parsec (défini par 1 parsec = $\frac{648000}{\pi}$ u.a. , on rappelle qu'une unité astronomique vaut exactement 149 597 870 700 m). Évaluer la taille d'une nébuleuse donnant naissance à 5000 étoiles. En déduire le volume V (en parsec cube, pc³) de la nébuleuse correspondante si l'on suppose qu'elle a une forme sphérique. Estimer enfin, toujours en pc³ le volume v , de nébuleuse dans lequel chaque étoile puise sa matière pour se former.

1. Richert, A. J. W., 2018, MNRAS, 477, 5191

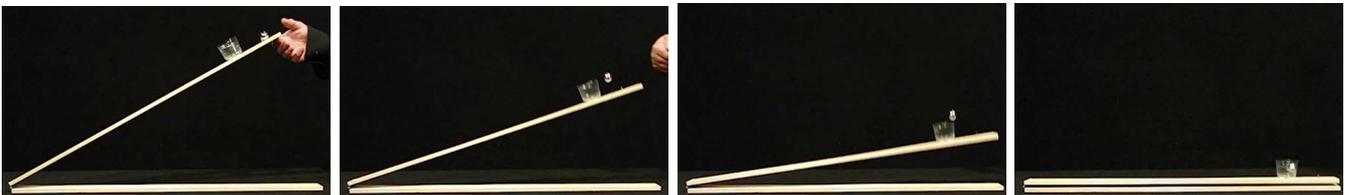
2. Pfalzner, S., Kirk, H., Sills, A., et al. 2016, A&A, 586, A68

- Q33 3. Des extrapolations³ faites à partir de mesures au sein du système solaire permettent d'estimer la densité d'objets interstellaires dont la taille est supérieure à 50 m à $n_{ISO}^* = 10^{15} \text{ pc}^{-3}$. En déduire le nombre d'objets interstellaires présents dans le volume v calculé précédemment. Ces objets s'ajoutent aux grains de poussière du disque protoplanétaire.

PLUS VITE QUE LA CHUTE LIBRE !

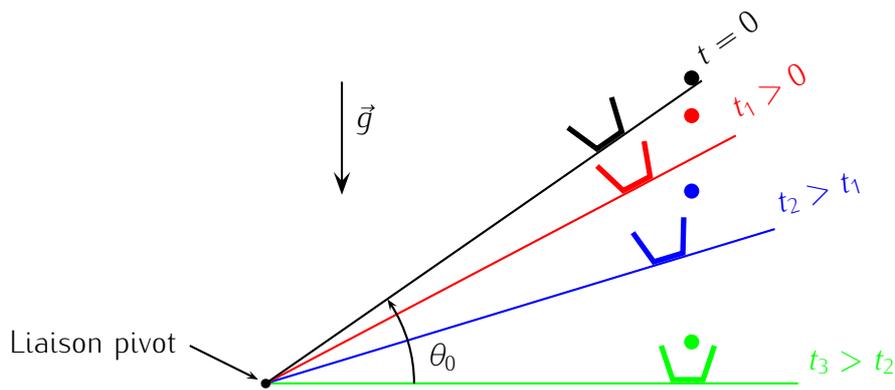
Nous savons qu'en l'absence de tout frottement, deux objets de masses différentes soumis à la gravité possèdent la même accélération : ils tombent en chute libre à la même vitesse. C'est pourquoi il peut être surprenant de rencontrer des situations où un objet tombe plus vite qu'en chute libre. Dans ce problème, nous proposons d'étudier une de ces situations.

Présentation de l'expérience



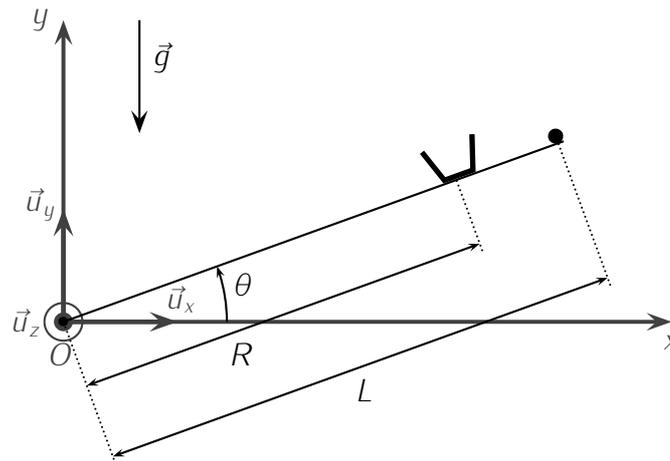
On considère le dispositif ci-dessus. Une planche de bois, rigide et homogène, est fixée à l'une de ses extrémités à un support fixe par une liaison pivot sans frottement. Elle tourne donc autour de l'axe horizontal Oz . À l'autre extrémité, un gobelet, de masse négligeable, est solidaire de la planche. Enfin, une bille est posée à l'extrémité de la planche, à côté du gobelet.

Initialement, la planche est immobile et inclinée par rapport au sol horizontal d'un angle θ_0 . À l'instant $t = 0$, on lâche la planche sans lui communiquer de vitesse initiale. On observe alors que, sous certaines conditions expérimentales précisées dans ce problème, le gobelet tombe plus vite que la bille et vient se positionner sous cette dernière : la bille se retrouve alors à l'intérieur du gobelet lorsque la planche touche le sol !



Le but de ce problème est d'expliquer ce phénomène, puis de déterminer les paramètres géométriques pertinents pour pouvoir réaliser cette expérience. Les notations utilisées sont définies sur le schéma suivant. On prendra $L = 1,0 \text{ m}$ et $\theta_0 = 30^\circ$.

3. Engelhardt, T., Jedicke, R., Vere, P., et al. 2017, AJ, 153,133



On note également :

- M la masse de la planche
- m la masse de la bille
- R la distance entre O et le centre du gobelet
- h la hauteur du gobelet
- J le moment d'inertie de la planche par rapport à l'axe (Oz) : $J = \frac{1}{3}ML^2$
- $\vec{g} = -g\vec{u}_y$ le champ de pesanteur supposé uniforme. On prendra $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Le référentiel d'étude sera le référentiel terrestre, noté \mathcal{R} , supposé galiléen. On négligera aussi les frottements de l'air. L'expérience peut être visualisée (après le DS !) sur ce lien : <https://www.youtube.com/watch?v=SoB6OgmVog0>

A. Étude du mouvement de la planche

L'angle $\theta(t)$ nous permet de repérer la position de la planche au cours du temps. Le but est de déterminer l'équation différentielle vérifiée par cet angle. Dans cette partie, on étudie le mouvement de la planche seule en supposant qu'elle n'est pas en contact avec la bille.

- Q34 1. En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à un axe que l'on précisera, exprimer l'accélération angulaire $\ddot{\theta}(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ de la planche en fonction de g , L et θ .
- Q35 2. Déterminer l'expression de l'accélération de l'extrémité droite de la planche dans le référentiel \mathcal{R} , notée $\vec{a}(L, t)$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, base que vous définirez sur un schéma, en fonction de g , L , $\dot{\theta}^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ et θ .
- Q36 3. L'accélération verticale initiale de l'extrémité droite de la planche est : $a_y(L, t = 0) = \vec{a}(L, t = 0) \cdot \vec{u}_y$. Déterminer l'expression de $a_y(L, t = 0)$ en fonction de g et θ_0 . Faire l'application numérique.
- Q37 4. Expliquer alors comment la bille peut tomber à l'intérieur du gobelet lorsque la planche touche le sol. On s'intéressera en particulier à la nature du mouvement de la bille.

B. Détermination des temps de chute de la bille et de la planche

5. L'altitude de départ de la bille est notée y_0 .
- Q38 (a) Déterminer l'expression de y_0 . Faire l'application numérique.

- Q39 (b) Déterminer l'expression du temps de chute T_{bille} de la bille en fonction de g et y_0 . Faire l'application numérique.
6. On s'intéresse maintenant au temps de chute de la planche, noté T_{planche}
- Q40 (a) À partir de l'équation obtenue à la question 1, montrer que la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ s'écrit $\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin \theta_0 - \sin \theta(t))}$
- Q41 (b) En déduire l'expression du temps de chute de la planche T_{planche} sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer analytiquement.
- Q42 (c) Proposer un programme python permettant d'estimer numériquement la valeur de cette intégrale.
- Q43 (d) Pour $\theta_0 = 30^\circ$, on donne $\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta}} = 1,52$. Calculer la valeur numérique de T_{planche} .
- Q44 7. Ces résultats sont-ils cohérents avec les observations ?

C. Détermination des paramètres permettant de « dimensionner » l'expérience

Plusieurs facteurs peuvent empêcher la bille de retomber à l'intérieur du gobelet. C'est en particulier le cas :

- si l'angle d'inclinaison initial de la planche devient « trop grand » (condition 1)
- si le gobelet est fixé sur la planche « trop loin » de la bille (condition 2)
- si la hauteur du gobelet est « trop importante » (condition 3)

Le but ici est d'essayer de quantifier ces paramètres.

- Q45 8. Condition 1 : En vous aidant des résultats de la partie A et en supposant que les deux autres conditions permettent à la bille de tomber dans le gobelet, déterminer la valeur de l'angle θ_0 maximale acceptable, notée $\theta_{0,\text{max}}$, pour que la bille retombe à l'intérieur du gobelet lorsque la planche touche le sol. Faire l'application numérique.
Par la suite, on suppose que l'angle θ_0 reste inférieur à $\theta_{0,\text{max}}$
- Q46 9. Condition 2 : Par un argument purement géométrique, déterminer en fonction de L et θ_0 la distance R à laquelle il faut fixer le centre du gobelet pour que la bille, qui se trouve initialement à l'extrémité droite de la planche, tombe à l'intérieur du gobelet. Faire l'application numérique.
On suppose maintenant que les conditions 1 et 2 permettent à la bille de retomber dans le gobelet.
- Q47 10. Condition 3 : On note $h = 4$ cm la hauteur du gobelet. Que doit-on vérifier pour pouvoir dire que la bille retombe à l'intérieur du gobelet à coup sûr ? Est-ce le cas avec les valeurs prises dans l'énoncé ?

DISQUE PROTOPLANÉTAIRE

1 Sédimentation verticale de la poussière

1. On étudie une particule de masse dans un référentiel lié à l'étoile supposé galiléen, cette particule est soumise uniquement à l'interaction gravitationnelle d'expression :

Q1
$$\vec{F} = -\frac{GM_E m}{(r^2+z^2)^{3/2}} (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z)$$

D'après la seconde loi de Newton on a : $m\vec{a} = \vec{F}$, avec $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$ (mvt à $r = cte$).

Ainsi, en projection selon l'axe (Oz) on obtient : $m\ddot{z} = -\frac{GM_E m}{(r^2+z^2)^{3/2}} z$

Dans l'hypothèse d'un disque mince $|z| \ll r$, donc $r^2 + z^2 \simeq r^2$.

On a bien en première approximation : $\ddot{z} = -\omega^2 z$ où $\omega = \sqrt{\frac{GM_E}{r^3}}$.

D'après l'équation différentielle qui doit être homogène, $[\ddot{z}] = [\omega^2 z]$. On a alors $[\omega] = T^{-1}$. On le vérifie également grâce à son expression littérale. On sait que $[F] = [\frac{GMm}{r^2}]$ donc $[\frac{GM_E}{r^3}] = [\frac{F}{rM}] = [\frac{MLT^{-2}}{LM}] = T^{-2}$, c'est la bonne dimension.

2. L'équation différentielle obtenue est celle d'un oscillateur harmonique. La particule va osciller de part et d'autre du plan sans jamais tendre vers une position d'équilibre. On n'aura donc pas d'accumulation de poussière en $z = 0$. La résolution donne : $z(t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Q2

3. D'après l'énoncé, le gaz et la particule de poussière tournent autour de l'étoile à la même vitesse angulaire. La vitesse du gaz est donc en moyenne $r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, le vecteur vitesse relative est $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z - r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \dot{z}\vec{u}_z$ et sa norme vaut simplement $|\dot{z}|$.

On ajoute donc une force de frottement qui a donc pour expression $-\beta|\dot{z}|\dot{z}\vec{e}_z$. En appliquant de

Q3

nouveau la seconde loi de Newton en projection selon l'axe Oz on trouve $\ddot{z} = -\omega^2 z - \frac{\beta}{m}|\dot{z}|\dot{z}$

Attention, l'on projette le pfd selon z , certes le terme \vec{v} donne \dot{z} , mais le terme v est déjà un scalaire et n'a pas à être projeté. S'il ne s'agissait pas de la vitesse relative, on n'aurait pas $v = |\dot{z}|$. On a rencontré ce cas dans le cas des équations de chute libre avec frottement quadratique dans l'air : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \beta v\vec{v}$, ce qui se projette sur x par exemple en : $m\ddot{x} = 0 - \beta\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \times \dot{x}$. La force de frottement selon x n'est pas du tout $-\beta\dot{x}|\dot{x}|$.

4. On pose $v_- = -\dot{z}$ si $\dot{z} < 0$, on peut alors écrire, dans le cas où $\dot{z} < 0$: $\ddot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt} \frac{dz}{dz} = v_- \frac{dv_-}{dz}$,

Q4

la seconde loi de Newton se réécrit alors : $v_- \frac{dv_-}{dz} = -\omega^2 z + \frac{\beta}{m} v_-^2$

On pose $\mu = \frac{\beta}{m}$. Dimensionnellement, $[v_- \frac{dv_-}{dt}] = [\mu v_-^2]$, donc $[\frac{1}{\mu}] = L$

5. Posons, pour alléger les calculs $f = v_-^2$, alors $\frac{df}{dz} = 2v_- \frac{dv_-}{dz}$ et l'équation à résoudre peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{df}{dz} - 2\mu f = -\omega^2 z$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficients constants avec un second membre polynomial. L'ensemble des solutions est donné par la somme des solutions, f_h de l'équation homogène associée et d'une solution particulière f_p .

On a : $f_h(z) = A \exp(2\mu z)$. On peut chercher f_p de la même forme que le second membre : $f_p(z) = Bz + C$, en injectant cet ansatz dans l'équation différentielle on obtient :

Q5

$$B - 2\mu(Bz + C) = -2\omega^2 z$$

Par identification, on trouve $B = \frac{\omega^2}{\mu}$ et $C = \frac{\omega^2}{2\mu^2}$, l'ensemble des solutions s'écrit bien : $f = v_-^2 = A \exp(2\mu z) + \frac{\omega^2 z}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2}$ avec $A \in \mathbf{R}$.

Q6 6. On a la condition initiale $v_-(z = z_0) = 0$, on peut alors déterminer la constante d'intégration $A = - \left(\frac{\omega^2 z_0}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2} \right) \exp(-2\mu z_0)$. Ainsi on obtient enfin :

$$v_-^2 = \left(\frac{\omega^2 z_0}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2} \right) \exp(2\mu(z - z_0)) + \frac{\omega^2 z}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2} = 0$$

Q7 7. La vitesse s'annule à l'altitude z_1 telle que $v_-(z_1) = 0$, on a alors :

$$\left(\frac{\omega z_0}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2} \right) \exp(2\mu(z_1 - z_0)) + \frac{\omega^2 z_1}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2} = 0$$

Q8 8. L'équation précédente montre l'existence de deux régimes, suivant la position initiale de la particule. Lorsque la hauteur initiale est bien plus grande que l'altitude caractéristique $\frac{1}{\mu}$, l'argument de l'exponentielle est très inférieur à -1 et on peut négliger ce terme. Dans ce cas, on trouve $z_1 = -\frac{1}{2\mu}$, il est assez remarquable que la position du point de rebroussement soit indépendante de l'altitude initiale. Ceci correspond à un **arrêt rapide** du mouvement, la particule part de z_0 et fait demi-tour à z_1 telle que $-z_1 \ll z_0$.

Q9 9. Dans le cas où $z \gg \frac{1}{\mu}$ on obtient le terme $\frac{\omega^2 z}{\mu}$ est bien plus grand que les autres dans l'expression de la formule de la question 6. et donc $v_-^2 = \frac{\omega^2 z}{\mu}$, d'où $\dot{z} = -\omega \sqrt{\frac{z}{\mu}}$

Q10 10. L'équation différentielle obtenue à la question précédente peut être résolue à l'aide de la méthode de séparation des variables :

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{\omega}{\sqrt{\mu}} dt$$

Soit : $2(\sqrt{z} - \sqrt{z_0}) = -\frac{\omega}{\sqrt{\mu}} t$, finalement on arrive enfin à l'expression de l'altitude au cours du

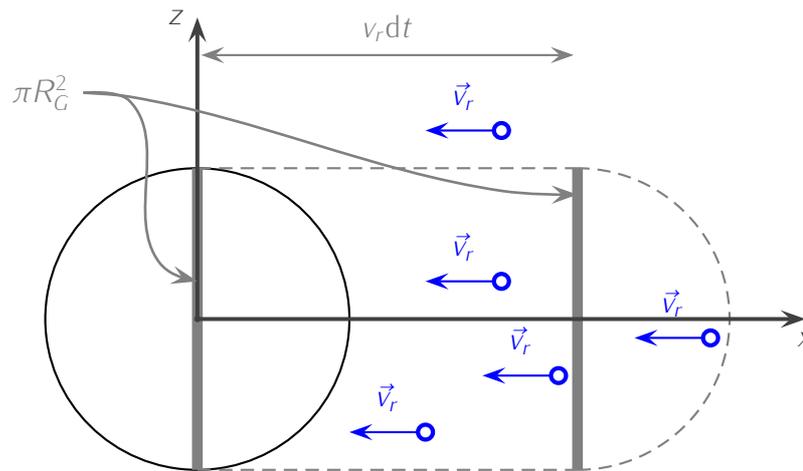
temps
$$z = z_0 \left(1 - \frac{\omega}{2\sqrt{\mu z_0}} t \right)^2$$

Q11 11. La particule fait son premier demi-tour lorsque sa vitesse est nulle. On dérive l'expression de la question précédente : $\dot{z} = 2z_0 \left(-\frac{\omega}{2\sqrt{\mu z_0}} \right) \left(1 - \frac{\omega}{2\sqrt{\mu z_0}} t \right)$. On a bien une vitesse négative. Pour trouver t_1 , on résout $\dot{z}(t_1) = 0$, soit : $t_1 = 2\frac{\sqrt{\mu z_0}}{\omega}$

Q12 12. On trouve $z(t_1) = 0$ et $\dot{z}(t = 0) \neq 0$, ce qui n'est ni compatible avec l'approximation faite, ni avec les conditions initiales. L'approximation faite est donc trop violente et ne peut pas être considérée comme valide tout au long du mouvement (peut-être suffisamment loin de $t = 0$ et $t = t_1$ seulement).

Q13 13. Dans le cas où z_0 est bien plus faible que $\frac{1}{\mu}$ alors, à l'aide de l'expression trouvée à la question 7) on trouve une altitude de rebroussement égale à $-z_0$, ceci correspond à une phase oscillatoire : la particule décrit des oscillations de part et d'autre du plan médian avec une amplitude lentement décroissante.

2 Modèle d'accrétion simple



1.

Q14

Les particules (dont on néglige la taille, cad on les suppose ponctuelles) entrant en collision avec la graine entre les instants t et $t + dt$ sont en face de la graine (au sens de \vec{v}_r va les amener sur la graine) et à une distance inférieure à $v_r \times dt$ car sinon elles n'ont pas le temps d'atteindre la graine. Cela forme un demi-cylindre privé d'une demi sphère à gauche et auquel on ajoute une demi-sphère à droite. Ces deux volumes se compensent et le volume (pour la question suivant) considérée est donc le même que celui d'un

cylindre de hauteur $v_r dt$ et de base πR_G^2

Q15

2. L'énoncé fourni la densité particulaire n^* , le volume occupée par les particules entrant en collision avec la graine étant $dV = \pi R_G^2 v_r dt$, leur nombre est $dN_{coll} = \pi n^* R_G^2 v_r dt$. En effet, toutes les particules qui sont dans le volume vont avoir une collision puisqu'elles ont toutes la même vitesse vers la graine. C'est un point différent du cas traité en cours.

3. Chaque particule possède une masse m , ainsi entre t et $t + dt$ la masse de graine augmente de $dM = m dN_{coll} = \pi n^* R_G^2 v_r m dt$.

Q16

La graine étant sphérique, sa masse est liée à son rayon par la relation $M = \frac{4}{3} \pi R_G^3 \rho_G$.

En différentiant terme à terme on obtient : $dM = 4\pi \rho_G R_G^2 dR_G = \pi n^* R_G^2 v_r m dt$. (Remarque : on peut également retrouver ce résultat en disant que la masse ajoutée à la graine se répartie sur la surface $4\pi R_G^2$ et sur une épaisseur dR_G).

On peut aussi raisonner de la façon suivante : la masse après est égale à la masse avant + la masse gagnée par les collisions : $M(t + dt) = M(t) + m dN_{coll}$ soit $\frac{M(t+dt) - M(t)}{dt} = m \pi n^* R_G^2 v_r$. Or $M(t) = \frac{4}{3} \pi R_G(t)^3 \times \rho_G$, d'où $\frac{dM}{dt} = 4\pi R_G(t)^2 \times \frac{dR_G}{dt} \times \rho_G$ et donc en égalisant avec l'expression précédente :

$$4\pi R_G(t)^2 \times \frac{dR_G}{dt} \times \rho_G = m \pi n^* R_G^2 v_r$$

Quelque soit la méthode, la vitesse d'accrétion est donc $\frac{dR_G}{dt} = \frac{v_r n^* m}{4\rho_G}$

On remarque que la vitesse d'accrétion est constante et en prenant $R_G(t = 0)$ on trouve :

$$R_G(t) = \frac{v_r n^* m}{4\rho_G} t$$

Q17

4. Le temps nécessaire pour que la graine atteigne une taille égale à la moitié de celle de la Terre est donné par $R_g(t_{1/2}) = \frac{1}{2} R_T$, soit $t_{1/2} = \frac{2R_T \rho_G}{v_r n^* m} \simeq 4.10^5$ années. Remarque, il faut justifier que $n^* m = \rho_D$. Cela est assez facile : considérons un volume V quelconque, contenant N particules, alors par définition de n^* , $N = n^* \times V$. La masse totale est $N \times m$ et donc la densité est $\rho_D = \frac{N \times m}{V} = n^* \times m$.

- Q18 5. Ce résultat est un ordre de grandeur plus faible que les résultats d'observations. Ce modèle n'est donc pas valide. On peut citer deux raisons possibles :
- On peut déjà évoquer le sillon qui se forme au cours de la formation d'une planète (voir la photographie de l'énoncé). Au fur à mesure la protoplanète « nettoie » sa trajectoire et la densité particulaire diminue, et donc l'accrétion est plus lente.
 - On peut également remettre en cause la valeur de la masse volumique de la planète. En effet, proche du centre, les forces de pression font que la masse volumique est bien plus élevée que celle fournie.

3 Modèle d'accrétion galopante



- Q19 On peut représenter la situation de la façon suivante : l'origine du repère est centré sur la graine, on oriente l'axe (Ox) tel que \vec{v}_r soit dans le plan (Oxz) et tel que (Ox) soit colinéaire à \vec{v}_r . On peut alors calculer le moment cinétique de la particule lorsque celle-ci est à l'infini avec la méthode du bras de levier : $\vec{L} = mbv_r\vec{u}_z$, on remarque que la grandeur b introduite dans l'énoncé correspond au bras de levier. Cette distance porte un nom, on l'appelle le paramètre d'impact (vu en TD).

Ne faites pas un cas particulier sur votre schéma où \vec{v}_r irait vers O , c'est très improbable.

- Q20 2. Cf cours Beaucoup ont voulu appliquer un TMC scalaire. Cela n'est pas cohérent avec ce que l'on veut montrer car c'est conservation de la direction du vecteur moment cinétique qui permet de montrer que le mouvement est plan ! Il est donc ici nécessaire d'appliquer un TMC vectoriel.

- Q21 3. L'énergie mécanique vaut $E_m = \frac{1}{2}mv_r^2 = \frac{1}{2}(i^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$

Comme la particule provient de l'infini $E_m > 0$ et la trajectoire qu'elle décrit est une hyperbole.

- Q22 4. Par conservation du moment cinétique on obtient : $r^2\dot{\theta} = L/m = Cste$

Ainsi $E_m = \frac{1}{2}mi^2 + \frac{1}{2}\frac{mb^2v_r^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$

- Q23 5. À la distance minimale d'approche $\dot{r}(t_{min}) = 0$ et alors :

$$\frac{1}{2}v_r^2 = \frac{1}{2}\frac{b^2v_r^2}{r_{min}^2} - \mathcal{G}\frac{M}{r_{min}}.$$

Attention si vous laissez E_m dans cette formule, ce n'est pas une donnée de l'énoncé.

- Q24 6. $v_l = \sqrt{\frac{2GM}{R_G}}$, cf cours.
 Attention, beaucoup d'entre vous avait un "r" dans le résultat, mais ce n'est pas n'importe quel "r", c'est le rayon de l'astre qui intervient car le raisonnement est une conservation de l'énergie mécanique entre un point de départ à la surface de l'astre et un point "à l'infini" (ou raisonnement sur E_m et $E_{p,eff}$ pour avoir un état de diffusion limite, mais le point de départ est toujours à la surface de l'astre).
- Q25 7. La distance minimale d'approche vérifie $r_{min}^2 = \frac{2GM}{v_f^2} r_{min} - b^2 = 0$ que l'on peut réécrire
 $r_{min}^2 + \frac{v_l^2}{v_f^2} r_{min} - b^2 = 0$
8. Ainsi r_{min} est solution d'une équation du second degré qui La seule solution possible (positive) est
 $r_{min} = \frac{1}{2} \left(-R_G \frac{v_l^2}{v_f^2} + \sqrt{\left(R_G \frac{v_l^2}{v_f^2} \right)^2 + 4b^2} \right)$ La particule heurte la planète si $r_{min} \leq R_G$ on obtient
 alors la condition : $\sqrt{\left(R_G \frac{v_l^2}{v_f^2} \right)^2 + 4b^2} \leq R_G + R_G \frac{v_l^2}{v_f^2}$, soit en élevant au carré en simplifiant on
 retrouve bien l'expression de l'énoncé $b^2 \leq R_G^2 \left(1 + \frac{v_l^2}{v_f^2} \right)$
- Q26
- Q27 9. Cette fois-ci les particules entrant en collision avec la graine entre les instants t et $t + dt$ étaient initialement dans un cylindre de base πb^2 , leur nombre est donc
 $dN_{coll} = \pi b^2 v_r n^* dt = \pi v_r n^* \left(1 + \frac{v_l^2}{v_f^2} \right) dt$
 (en fait le volume n'est pas tout à fait cylindrique pour des raisons similaire à la question 1 de la partie 2, mais le volume est identique à celui du cylindre)
- Q28 10. La vitesse d'accrétion est donc $\frac{dR_G}{dt} = \frac{v_r n^* m}{4\rho_G} \left(1 + \frac{2GM}{R_G v_f^2} \right)$. On constate l'apparition d'un terme supplémentaire par rapport au modèle simple qui provient de l'attraction gravitationnelle.
11. On peut résoudre cette équation différentielle non linéaire par la méthode de séparation des variables. En effet, en remarquant que M est lié à R_G par $M = \frac{4\pi}{3} \rho_G R_G^3$, on obtient : $\frac{dR_G}{1 + \left(\frac{R_G}{R_0} \right)} = v_G dt$
 Avec $v_G = \frac{v_r n^* m}{4\rho_G}$ et $R_0 = \sqrt{\frac{3v_f^2}{8\pi g \rho_G}}$ En intégrant entre $R_G = 0$ et $R_G = R_G(t)$, on obtient :
 $\arctan \left(\frac{R_G}{R_0} \right) = \frac{v_G t}{R_0}$
 Et finalement : $R_G(t) = R_0 \tan \left(\frac{v_G t}{R_0} \right)$
- Q29 12. On remarque que cette fois-ci l'évolution du rayon n'est plus linéaire mais diverge lorsque $\frac{v_G t}{R_0} = \frac{\pi}{2}$. Ceci est dû à l'interaction gravitationnelle. Plus la graine est massive et plus elle attire les particules les elles. Il y a un effet de focalisation gravitationnelle. En effet, on constate que plus M est grand et plus $\frac{dR_G}{dt}$ l'est aussi. On observe un effet boule de neige d'où l'expression « galopante ». Le temps typique de formation de la planète est certainement de l'ordre de $T = \frac{\pi R_0}{2v_G} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{6\rho_G}{g\rho_D}} \simeq 7.10^5$ années. On trouve là aussi un temps de formation typique bien trop faible.
- Q30

4 Une aide venue d'ailleurs

- Q31 1. Pour former une étoile de $0,5M_\odot$ il faut un nuage de gaz de masse comprise entre 1,7 et $5 M_\odot$, donc pour un amas de 5000 étoiles, il faut une masse de gaz comprise entre 8300 et $25000 M_\odot$.

- Q32 2. La loi d'échelle fournie dans l'énoncé donne $M_{neb} = 10^{3,42} R_{neb}^{1,67}$. On a alors $R_{neb} = \left(\frac{M_{neb}}{3,42}\right)^{1/1,67}$ on trouve alors une taille de nébuleuse comprise entre 2 et 3,9 pc et donc un volume V entre 33 et $2,4 \times 10^2 \text{ pc}^3$. Le volume accessible à chaque étoile est donc $v = \frac{4\pi R_{neb}^3}{3 \times 5000}$, soit un volume compris entre $6,6 \times 10^{-4}$ et $0,048 \text{ pc}^3$.
- Q33 3. L'énoncé donne la densité particulaire, on en déduit que le nombre d'objets interstellaires est : $N = n_{iso}^* v$ soit un nombre compris entre $6,6 \times 10^{12}$ et $4,8 \times 10^{13}$. (Les 2 chiffres significatifs sont "de trop" vu l'incertitude).

PLUS VITE QUE LA CHUTE LIBRE !

A. Étude du mouvement de la planche

- Q34 1. Système : { La planche }
 Référentiel : \mathcal{R} galiléen défini par l'énoncé.
 Bilan des efforts extérieurs : Le poids \vec{P} et la réaction de la liaison pivot \vec{R} . Il n'y a d'après l'énoncé pas de couple de frottement à prendre en compte au niveau de la liaison pivot.

Attention, il ne faut pas oublier \vec{R} sinon la planche serait simplement en chute libre et non pas en rotation ! On peut d'ailleurs en déduire que \vec{R} est vers la droite puisque le poids est simplement vertical et que le centre de masse se décale vers la droite.

L'axe Oz étant fixe et le référentiel étant galiléen, on peut appliquer le théorème du moment cinétique au système fermé (non ponctuel) défini ci-dessus :

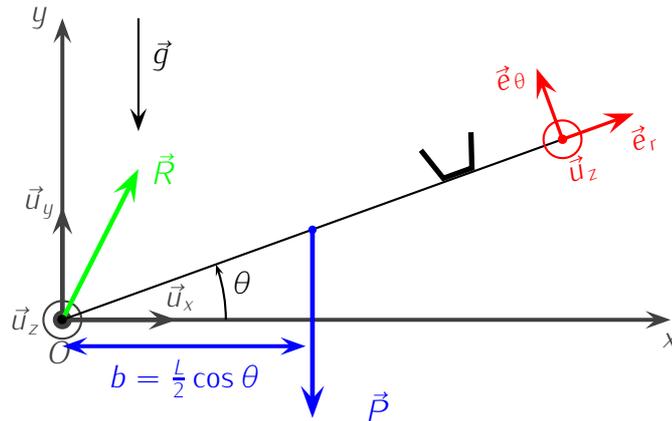
$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \Sigma \mathcal{M}_{Oz,ext}$$

L'angle θ étant l'angle de rotation autour de Oz et orienté correctement, $L_{Oz} = J\dot{\theta}$.

Cette formule est valable pour la rotation d'un solide autour d'un axe fixe. Attention à ne pas l'utiliser si votre système n'est pas un solide.

Il reste à calculer le moment des efforts extérieurs. La liaison pivot étant considérée comme parfaite, elle ne crée aucun moment. Le moment du poids peut s'exprimer à l'aide du bras de levier. Tout se passe comme si le poids total de la planche s'applique au niveau de son centre de masse, situé à une distance $\frac{l}{2}$ de l'axe, le bras de levier du poids est alors $b = \frac{l}{2} \cos \theta$, de plus le poids tend à faire « diminuer » θ , d'où $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = -Mg\frac{l}{2} \cos \theta$.

Attention au point d'application du poids (au niveau du centre de masse) et au signe du moment du poids. Plusieurs méthodes sont possible pour le signe, mais ici on peut simplement remarquer que le poids tends à faire diminuer θ : son moment est donc négatif (puisque θ est correctement orienté par rapport à Oz).



Le théorème du moment cinétique s'écrit donc $\frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2} \cos \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{3g}{2L} \cos \theta$.

Q35 2. La base est définie sur le schéma ci-dessus. L'accélération en coordonnées cylindro-polaire est $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$. Ici, $z = 0$, $r = cte = L$ et l'accélération est donc simplement $\vec{a}(L,t) = -L\dot{\theta}^2\vec{e}_r + L\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$. Toutefois, cela ne répond pas encore aux contraintes de l'énoncé qui demande θ à la place de $\dot{\theta}$. Il suffit alors d'utiliser la question précédente : $\vec{a}(L,t) = -L\dot{\theta}^2\vec{e}_r - \frac{3}{2}g \cos \theta \vec{e}_\theta$

Q36 3. $\vec{e}_\theta \cdot \vec{u}_y = \cos \theta$ et $\vec{e}_r \cdot \vec{u}_y = \sin \theta$ d'où $a_y(L,t) = \vec{a}(L,t) \cdot \vec{u}_y = -L\dot{\theta}^2 \sin \theta - \frac{3}{2}g \cos^2 \theta$
 $a_y(L,t=0) = -\frac{3}{2}g \cos^2 \theta_0$ car à $t = 0$, la planche est lâchée sans vitesse initiale et donc $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

L'application numérique donne ici -11 m/s^2 .

Q37 4. La bille a un mouvement rectiligne uniformément accéléré à g . Puisque l'accélération de la planche initialement est plus grande que celle de la bille (dépend de θ_0), alors au début la planche descend « plus vite » puisque les deux partent sans vitesse initiale et le gobelet peut arriver au sol avant la bille, ce qui permet à la bille de venir tomber dans le gobelet ensuite.

B. Détermination des temps de chute de la bille et de la planche

Q38 5. (a) y_0 s'obtient par trigonométrie : $y_0 = L \sin \theta = 0,50 \text{ m}$.

Q39 (b) La bille a un mouvement uniformément accéléré avec une vitesse initiale nulle, l'équation de son mouvement sont donc (détail non fait ici) : $y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$. Le temps de chute correspond à l'instant où y s'annule, soit $T_{\text{bille}} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = 0,32 \text{ s}$.

Q40 6. (a) Il faut utiliser l'astuce « classique » de multiplier par $\dot{\theta}$ pour pouvoir intégrer : $\ddot{\theta}\dot{\theta} = -\frac{3g}{2L} \cos(\theta) \times \dot{\theta}$. Puis, on prend l'intégrale entre $t = 0$ et le temps courant (pour éviter d'avoir des constantes d'intégration)
 $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2(t) - \frac{1}{2}\dot{\theta}_0^2 = \frac{3g}{2L}(-\sin \theta + \sin \theta_0)$ d'où
 $\dot{\theta}^2(t) = \frac{3g}{L}(\sin \theta_0 - \sin \theta(t))$. $\dot{\theta}$ étant négatif puisque θ décroît, on obtient le résultat de l'énoncé :

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin \theta_0 - \sin \theta(t))}$$

Q41 (b) On ré-écrit l'équation sous la forme $\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin \theta_0 - \sin \theta(t))}$ soit $dt = -\sqrt{\frac{L}{3g} \frac{d\theta}{\sin \theta_0 - \sin \theta}}$

$$\text{d'où } T_{\text{planche}} = - \int_{\theta_0}^0 \sqrt{\frac{L}{3g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta}}$$

$$T_{\text{planche}} = \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{L}{3g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta}}$$

- Q42 (c) Plusieurs moyens sont disponibles : utiliser quad ou programmer une méthode des rectangles. Il faut par contre éviter les trapèzes à cause de la divergence en θ_0 de la fonction à intégrer.
- Q43 (d) Numériquement $T_{\text{planche}} = 1,52 \times \sqrt{\frac{1,0}{3 \times 9,8}} = 0,28 \text{ s}$
- Q44 7. La planche tombe légèrement plus vite que la bille, ce qui est cohérent avec les photographies montrées au début du sujet. Toutefois, l'écart entre les deux temps de chute est faible.

C. Détermination des paramètres permettant de « dimensionner » l'expérience

- Q45 5. Condition 1 : La condition attendue par l'énoncé est a priori que l'accélération initiale de la planche soit plus élevée que celle de la bille soit $\frac{3}{2}g \cos^2 \theta_0 > g$ d'où

$$\theta_{0,\text{max}} = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} = 35,26^\circ \text{ (remarque : il est ici possible de donner autant de chiffre significatif que l'on veut puisque 3 et 2 sont des valeurs exacte et que cet angle ne dépend d'aucune valeur de l'énoncé)}$$

En fait, si cette condition n'est pas vérifiée, alors la bille restera en contact avec la planche jusqu'à ce que l'accélération de la planche soit plus élevée que celle de la bille et ce n'est pas forcément réhibitoire, mais il devient alors plus difficile de répondre aux questions suivantes.

- Q46 6. Condition 2 : La bille tombant à la verticale purement (si l'on vérifie $\theta_0 \leq \arccos \frac{2}{3}$, il faut que la position finale du gobelet soit située à la verticale de la position initiale de la bille, d'où

$$R = L \cos \theta_0 = 0,87 \text{ m}$$

- Q47 7. Condition 3 :

En fait, il faudrait prendre en compte la largeur du gobelet, la trajectoire du bord haut du gobelet (cercle de rayon $\sqrt{(R + \frac{1}{2})^2 + h^2}$) et regarder à quel instant elle coupe la trajectoire de la bille et si à cet instant la bille est bien plus haute que le bord du gobelet. Mais cette méthode nécessite d'évaluer l'intégrale $\int_{\theta_1}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta}}$ et de connaître la largeur du gobelet, ce que vous ne pouvez pas faire : cela n'est donc probablement pas la méthode attendue par l'énoncé.

Un critère simple que l'on peut vérifier : dans le cas où le gobelet est infiniment fin, il faut que lorsque le gobelet touche le sol, la bille soit encore à une hauteur supérieure à h pour ne pas taper contre le bord. Ici, $y(T_{\text{planche}}) = y_0 - \frac{1}{2}g T_{\text{planche}}^2 = 11 \text{ cm} > h = 4 \text{ cm}$, le critère est donc vérifié et on a même un peu de marge pour prendre en compte le fait que le gobelet n'est pas infiniment fin.