2.6 Forces centrales-Exercice 14

La comète de Halley a un mouvement elliptique de période T = 76,06 années.
Elle passe au plus près du Soleil à une distance de $0{,}56R_0$ où $R_0 = 150.10^6$ km est le rayon de l'orbite terrestre autour du soleil. La masse du soleil est : $M = 2.10^{30}$ kg. La constante de la gravitation est : $G = 6{,}67.10^{-11}$ SI

a-Retrouver la troisième loi de Kepler pour un satellite en orbite circulaire de rayon R.

b-Que devient cette loi pour une trajectoire elliptique de demi-grand axe a ?

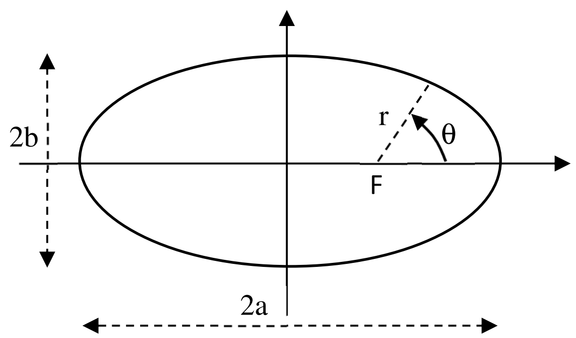
c-Calculer le demi-grand axe de la comète de Halley.

d-Calculer l'excentricité de l'ellipse.

e-Quelle est la vitesse maximale de la comète ?

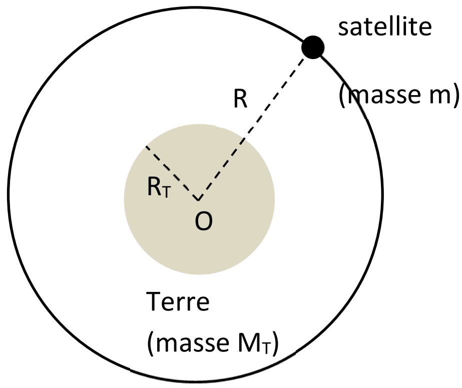
Données : L'équation de l'ellipse en coordonnées polaires est : $r = \frac{p}{1+e\,cos(\theta-\theta_0)}$

Pour $\theta_0 = 0$:



Aire de l'ellipse : $S = \pi ab$
Paramètre de l'ellipse : $p = \frac{b^2}{a}$

2.6 Forces centrales-Exercice 14



a-On prend le cas d'un satellite en orbite autour de la Terre.
Loi de la quantité de mouvement au satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :
$-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{GmM_T}{R^2}$

Et $v = R\dot{\theta}$, d'où : $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$

Avec $v = 2\pi R/T$, on a : $\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}}$

b-On remplace R par a et la masse de la Terre par celle du Soleil :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

c-A.N : $\underline{a = 2{,}69.10^{12}\text{ m}}$

d-On a : $r_{min} = r(0) = \frac{p}{1+e}$ et $r_{max} = r(\pi) = \frac{p}{1-e}$

D'où : $2a = r_{max} + r_{min} = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = \frac{2p}{1-e^2}$ => $a = \frac{p}{1-e^2}$

On a aussi : $0{,}56R_0 = \frac{p}{1+e}$

A partir de ces deux équations on en déduit : $e = 1 - \frac{0{,}56R_0}{a}$ A.N : $\underline{e = 0{,}97}$

e-On a : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

La vitesse maximale est atteinte au périhélie où $\dot{r} = 0$, donc : $\vec{v}_{max} = r_{min}\dot{\theta}(0)\vec{u}_\theta$

Pour un mouvement à force centrale, la vitesse aréolaire est constante : $v_{aréolaire} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{S}{T}$

$\frac{1}{2}r_{min}^2\dot{\theta}(0) = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi a\sqrt{ap}}{T} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}$ => $r_{min}\dot{\theta}(0) = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{r_{min}T}$

Finalement : $\boxed{v_{max} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{0{,}56R_0T}}$ A.N : $v_{max} = 55$ km.s^{-1}
