Corrigé du DL n° 3.

1. (a) i. La fonction φ_t est indéfiniment dérivable par composée de telles fonctions. De plus, si $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\varphi_t'(x) = \cos(t)e^{x\cos(t)}}, \qquad \boxed{\varphi_t''(x) = \cos^2(t)e^{x\cos(t)}}.$$

ii. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 entre a et $x \in \mathbb{R}$ à la fonction φ_t (qui est bien de classe $\mathcal{C}^2$) :

$$\varphi_t(x) = \varphi_t(a) + (x-a)\varphi_t'(a) + \int_a^x (x-u)\varphi_t''(u)\mathrm{d}u.$$

On pose alors $\boxed{\alpha_t(x) = \int_a^x (x-u)\varphi_t''(u)\mathrm{d}u}$. Il reste à majorer $\alpha_t(x)$. On a (en se méfiant, car on peut avoir $x \leqslant a$) :

$$\begin{aligned} |\alpha_t(x)| &= \left|\int_a^x (x-u)\varphi_t''(u)\mathrm{d}u\right| \\ &= \left|\int_a^x (x-u)\cos^2(t)e^{u\cos(t)}\mathrm{d}u\right| \\ &\overset{\text{pos. int.}}{\leqslant} \left|\int_a^x |x-u|\left|e^{u\cos(t)}\right|\mathrm{d}u\right| \end{aligned}$$

Or, $|e^y| = e^y \leqslant e^{|y|}$, donc $e^{|u|} \leqslant e^{|x|+|a|}$ quand u est entre x et a, car alors $|u| \leqslant |a|$ ou $|u| \leqslant |x|$, donc $|u| \leqslant |a| + |x|$. On a donc

$$|x-u|\,e^{u\cos(t)} \leqslant |x-u|\,e^{|u|} \leqslant |x-u|\,e^{|x|+|a|},$$

et par croissance de l'intégrale (attention toujours à x et a)

$$|\alpha_t(x)| \leqslant \left|\int_a^x |x-u|\,e^{|u\cos(t)|}\mathrm{d}u\right| \leqslant \left|\int_a^x |x-u|\,e^{|u|}\mathrm{d}u\right| \leqslant e^{|x|+|a|}\left|\int_a^x |x-u|\,\mathrm{d}u\right|.$$

Enfin, comme $x-u$ est de signe constant entre a et x, on a

$$\left|\int_a^x |x-u|\,\mathrm{d}u\right| = \left|\int_a^x (x-u)\mathrm{d}u\right| = \frac{(x-a)^2}{2},$$

d'où la majoration demandée.

(b) Fixons a et x comme dans 1(a)i. On a alors $\boxed{f_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_t(x)\mathrm{d}t}$ et $\boxed{f_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_t'(x)\mathrm{d}t}$.

On pose alors

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha_t(x)\mathrm{d}t}.$$

D'après 1(a)i, on a donc (les relations sont vraies pour tout $t \in \mathbb{R}$)

$$\int_0^{2\pi} \varphi_t(x)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \varphi_t(a)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} (x-a)\varphi_t'(a)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \alpha_t(x)\mathrm{d}t.$$

En divisant par 2π, et en remarquant que $x-a$ peut être sorti de l'intégrale, on a l'égalité demandée. Enfin, on a

$$|\varepsilon(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_t(x)\mathrm{d}t\right| \overset{\text{pos. int.}}{\leqslant} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\alpha_t(x)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(x-a)^2}{2}e^{|a|+|x|}\mathrm{d}t = \frac{(x-a)^2}{2}e^{|a|+|x|}.$$

(c) Pour $x \neq a$, on a

$$\left|\frac{f_0(x)-f_0(a)}{x-a} - f_1(x)\right| = \left|\frac{\varepsilon(x)}{x-a}\right| \leqslant \frac{e^{|x|+|a|}}{2}\,|x-a| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $\dfrac{f_0(x)-f_0(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f_1(a)$, ce qui prouve la dérivabilité de f_0 en a, donc sur $\mathbb{R}$.

2. On peut recommencer de la même façon pour f_n (avec $\varphi_t(x) = \cos^n(t)e^{x\cos(t)}$. On peut aussi écrire que, pour $x \neq a$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_n(x)-f_n(a)}{x-a} - f_{n+1}(a)\right| &= \frac{1}{2\pi(x-a)}\left|\int_0^{2\pi} \cos^n(t)(e^{x\cos(t)} - e^{a\cos(t)} - (x-a)\cos(t)e^{a\cos(t)})\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi|x-a|}\int_0^{2\pi} \left|e^{x\cos(t)} - e^{a\cos(t)} - (x-a)\cos(t)e^{a\cos(t)}\right|\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi|x-a|}\int_0^{2\pi} |\alpha_t(x)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{e^{|x|+|a|}}{4\pi}\,|x-a| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

ce qui prouve que f_n est dérivable en a et que $f_n'(a) = f_{n+1}(a)$.

On en déduit que $\boxed{f_0 \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$.

3. (a) En effectuant le changement de variable $u = 2\pi - t$, on obtient

$$\int_0^{\pi} \cos^n(t)e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t = \int_{2\pi}^{\pi} \cos^n(2\pi-u)e^{x\cos(2\pi-u)}(-1)\mathrm{d}u = \int_{\pi}^{2\pi} \cos^n(u)e^{x\cos(u)}\mathrm{d}u.$$

Par la relation de Chasles, on a donc

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \cos^n(t)e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} \cos^n(t)e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^n(t)e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t.$$

(b) Le cas $n = 0$ dans la question précédente donne

$$\boxed{f_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t\right)}.$$

On effectue alors le changement de variable $u = \pi - t$ dans cette dernière intégrale. Comme $\cos(t) = \cos(\pi - u) = -\cos(u)$, on obtient

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\cos(t)}\mathrm{d}t}.$$

En réinjectant dans la première égalité de la question, on obtient

$$f_0(x) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\cos(t)}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{x\cos(t)} + e^{-x\cos(t)}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ch}(x\cos(t))\mathrm{d}t.$$

On raisonne de même pour f_1. Il y a un signe "-" supplémentaire qui apparait dans le changement de variable $u = \pi - t$ dû au $\cos(t)$ en facteur, et cela donne le $\mathrm{sh}(x\cos(t))$.

(c) Le cosinus hyperbolique est positif, donc $\boxed{f_0(x) \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{ch}(x\cos(t))\mathrm{d}t}$. Or, si $x \geqslant 0$ et $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$, on a $x\cos(t) \in [\frac{x}{2}, x]$, et par croissance du cosinus hyperbolique sur $\mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{ch}(x\cos(t) \geqslant \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$, et par croissance de l'intégrale, on a donc, pour $x \geqslant 0$,

$$f_0(x) \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{3}\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{3}\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right).$$

On fait de même pour $f_1(x)$.

4. Remarquons que $\boxed{f_0 \text{ est paire}}$. En effet, en effectuant le changement de variable $t = \pi - u$, on obtient, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_0(-x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x\cos(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} e^{-x\cos(\pi-u)}(-\mathrm{d}u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos(u)}\mathrm{d}u = f_0(x).$$

De plus, $\boxed{f_0(0) = 1}$, et par 3(c), $f_0'(x) = f_1(x) > 0$ si $x > 0$, donc $\boxed{f_0 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$. Enfin, 3(c) donne par comparaison $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty}$.

5. D'après la question 2, il s'agit de montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, on a $xf_2(x) + f_1(x) - xf_0(0) = 0$, ou encore :

$$\boxed{x\int_0^{2\pi} \cos^2(t)e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \cos(t)e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t - x\int_0^{2\pi} e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t = 0}.$$

Or, $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$, et en remplaçant dans la première intégrale ci-dessus, on doit simplement montrer que

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(t)e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t = x\int_0^{2\pi} \sin^2(t)e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t}.$$

Or, on peut calculer la deuxième intégrale par une intégration par parties, avec

$$u(t) = \sin(t), \quad u'(t) = \cos(t), \quad v(t) = -e^{x\cos(t)}, \quad v'(t) = x\sin(t)e^{x\cos(t)},$$

les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, et on a

$$\begin{aligned} x\int_0^{2\pi} \sin^2(t)e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \sin(t)\left(x\sin(t)e^{x\cos(t)}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\sin(t)\left(-e^{x\cos(t)}\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos(t)\left(-e^{x\cos(t)}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(t)e^{x\cos(t)}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On a bien démontré l'égalité demandée.

6. Il s'agit de montrer que $\boxed{n\int_0^{2\pi}\cos^n(t)\mathrm{d}t=(n-1)\int_0^{2\pi}\cos^{n-2}(t)\mathrm{d}t}$. On procède par intégration par parties, comme pour les intégrales de Wallis :

$$\begin{aligned}2\pi f_n(0)=\int_0^{2\pi}\cos^n(t)\mathrm{d}t&=\int_0^{2\pi}\cos^{n-1}(t)\cos(t)\mathrm{d}t\\&=\left[\cos^{n-1}(t)\sin(t)\right]_0^{2\pi}+(n-1)\int_0^{2\pi}\cos^{n-2}(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t\\&=(n-1)\int_0^{2\pi}\cos^{n-2}(t)(1-\cos^2(t))\mathrm{d}t\\&=(n-1)2\pi f_{n-2}(0)-(n-1)2\pi f_n(0),\end{aligned}$$

ce qui donne la formule demandée.

7. On peut remarquer que $\boxed{\text{si } n \text{ est pair, } f_n \text{ est paire}}$, et $\boxed{\text{si } n \text{ est impair, } f_n \text{ est impaire}}$. En effet, on a déjà vu que f_0 est paire. Or, la dérivée d'une fonction paire est impaire. Donc f_1 est impaire. Mais la dérivée d'une fonction impaire est paire, donc f_2 est paire, et une récurrence permet de prouver le résultat annoncé.

   On a donc $\boxed{f_n(0)=0 \text{ si } n \text{ est impair}}$. On peut aussi utiliser la question précédente en partant de $f_1(0)=0$.

   Enfin, si $n=2p$ pour $p\in\mathbb{N}$, comme $f_0(0)=1$, on a

$$f_n(0)=\frac{2p-1}{2p}f_{n-2}(0)=\frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2}f_{n-4}(0)=\frac{(2p-1)(2p-3)\cdots(3)(1)}{(2p)(2p-2)\cdots(4)(2)}f_0(0),$$

   et en procédant comme pour les intégrales de Wallis, on obtient

$$\boxed{f_{2p}(0)=\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}}.$$

8. La fonction f_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc elle admet un développement limité en 0 à tout ordre, et de plus, d'après la formule de Taylor-Young, la parité de f_0, et la question 2, pour $n\in\mathbb{N}$, on a

$$f_0(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f_0^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}\frac{f_{2k}(0)}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1}).$$

   Enfin, le calcul précédent donne (f_0 est paire)

$$\boxed{f_0(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}+o(x^{2n+1})}.$$