ALGÈBRE

Épreuves orales

I. Réduction

1 *CCP MP (exercice 68)*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en utilisant le rang de la matrice,
   (c) en calculant le polynôme caractéristique et en déterminant les sous-espaces propres,
   (d) en calculant A^2.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

2 *CCINP PSI*

Soit n un entier strictement positif et M une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie $M^2 + M^\top = I_n$.

1. On suppose que M est symétrique.
   Montrer que M est diagonalisable et que $\mathrm{tr}(M) \times \det(M) \neq 0$.
2. On ne suppose plus M symétrique. Montrer que M est diagonalisable.
3. Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas une valeur propre de M.

3 *Mines-Ponts*

Soit $n \geqslant 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

4 *Centrale-Supélec*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de cœfficients $a_{ij} > 0$ vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

Montrer que 1 est valeur propre de A.
Montrer que toutes les valeurs propres de A sont de module au plus égal à 1 et que 1 est la seule dont le module vaut 1.

5 *Mines-Télécom*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'endomorphisme $f : P \mapsto P - P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que f est bijectif.
2. Étudier la diagonalisabilité de f.

6 *Mines-Ponts*

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B ont au moins un vecteur propre commun.

$\boxed{7}$ *ENS*

Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\Delta : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AM + MB$.

1. On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que Δ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
2. On suppose que A et B sont nilpotentes. Montrer que Δ est nilpotente. Dans ce cas, déterminer l'indice de nilpotence de Δ en fonction de ceux de A et B.

$\boxed{8}$ *Centrale*

1. Quelles sont les valeurs propres d'une matrice nilpotente ?
2. Que dire de M nilpotente et diagonalisable ?

$\boxed{9}$ *Centrale-Supélec*

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donnée, résoudre l'équation $X + X^\top = \mathrm{tr}(X)A$.

$\boxed{10}$ *CCINP / Mines-Ponts*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{2i\pi/3}$. On note φ l'endomorphisme canoniquement associé.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{C}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.
   Montrer que F est stable par φ si et seulement si $e_1 \in F$.
   Déterminer tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par φ.
4. Donner la dimension de $C(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}),\ AM = MA\}$.

$\boxed{11}$ *Mines-Ponts*

Soit f un endomorphisme d'un E espace vectoriel. On suppose que f^2 est diagonalisable.
On veut montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

1. Montrer le sens direct.
2. On note λ une valeur propre non nulle de f^2, μ_1 et μ_2 ses racines.
   Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - \mu_1 \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mu_2 \mathrm{Id})$.
   Conclure.

$\boxed{12}$ *CCINP*

On note u l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

1. Calculer le rang de $A - I_3$ et en déduire que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})^2$ et montrer que ces sous-espaces sont supplémentaires.
3. Soit $n \geqslant 2$. Soit $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $X^n = A$.
   On note v l'endomorphisme canoniquement associé à X.
   (a) Montrer que u et v commutent et en déduire que $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})^2$ sont stables par v.
   (b) Montrer que X est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ avec $Y \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
   (c) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $YJ = JY$ et en déduire que $Y \in \mathrm{Vect}(I_2, J)$.
   (d) Résoudre $X^n = A$.

II. Espaces euclidiens

$\boxed{13}$ *CCP MP (exercice 92)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$ où tr désigne la trace et $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E. Déterminer $F^\perp$.

$\boxed{14}$ *CCP MP (exercice 81)*
On définit sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}(A^\top A')$.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathscr{F}^\perp$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.

$\boxed{15}$ *CCP MP (exercice 76)*
Soit $E = \{f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}),\ \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}$.
Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t,\ f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

$\boxed{16}$ *CCINP*
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère p la projection orthogonale sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y + z = 0$.
Déterminer la matrice de p dans la base canonique, puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$.

$\boxed{17}$ *Mines-Ponts*
Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{C}_A = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \langle Ax, x\rangle = 0\}$.

1. Dans cette question, on prend $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}_A$.
2. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.
   (i) $\mathscr{C}_A = \mathrm{Ker} A$
   (ii) $\mathscr{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$
   (iii) $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ ou $-A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$\boxed{18}$ *Mines-Ponts PSI*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX \geqslant 0$.

Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $PAP^\top = \begin{pmatrix} I_k & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$.

$\boxed{19}$ *Centrale PSI*

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, à valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ toutes strictement positives.
   Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(t_1,\dots,t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $t_1+\dots+t_n = 1$ alors $\varphi\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n t_k\varphi(x_k)$.
   (b) Montrer que $\sum_{i=1}^n \varphi(a_{i,i}) \leqslant \sum_{i=1}^n \varphi(\lambda_i)$.
   (c) En déduire que $\det(A) \leqslant \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.
2. Soit A une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que
   $$|\det(A)| \leqslant \prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2}.$$
   On supposera dans la suite que cette inégalité est aussi valable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
3. On note D la boule fermée de rayon 1 dans $\mathbb{C}$.
   Montrer que pour tout $(z_1,\dots,z_n) \in D^n$, $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |z_j - z_i| \leqslant n^{n/2}$.

$\boxed{20}$ *CCINP*

1. Montrer que $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de f, endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & 4 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $(\alpha,\beta,\gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $v_1 = \frac{1}{\alpha}u_1$, $v_2 = \frac{1}{\beta}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ et $v_3 = \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
3. On note H la droite dirigée par v_1.
   Calculer $\langle f(v_2), v_1\rangle$ et $\langle f(v_3), v_1\rangle$ et montrer que $H^\perp$ est stable par f.
4. Montrer que dans la base (v_1,v_2,v_3), f a pour matrice $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -4\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix}$.
5. Montrer que M n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
6. En étudiant $f \circ r_1$ où r_1 est la réflexion par rapport au plan engendré par v_1 et v_3, montrer que f est la composée de deux symétries.
7. Montrer que f ne peut pas être la composée de deux réflexions.

$\boxed{21}$ Soit E un espace euclidien et $(a,b) \in E^2$ une famille libre de vecteurs unitaires.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \langle x,a\rangle b + \langle x,b\rangle a. \end{array}$

1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\varphi = (\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}$.
3. Déterminer $\mathrm{Im}\varphi$.
4. Évaluer $\varphi(a+b)$ et $\varphi(a-b)$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

$\boxed{22}$ *CCINP*

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
   Soit f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M_a est la représentation matricielle dans la base canonique :
   $$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 2a+1 & -a \\ 4a & 4a & -2a+1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer $\det(M_a)$. En déduire que f_a est bijectif.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de f_a.
   L'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f_a - Id)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que $\mathrm{Im}(f_a - Id)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(f_a - Id)$.
2. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.
   Soient u et v des vecteurs de E avec u et v non nuls.
   Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x + \langle x,v\rangle u. \end{array}$
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id)$ est de dimension $n-1$ et déterminer $\mathrm{Im}(f - Id)$.
   (c) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de f.
   L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   (d) Montrer que : f bijective $\Leftrightarrow \langle u,v\rangle \neq -1$.
   Dans le cas f bijective, calculer f^{-1}.
   (e) On suppose $u \perp v$.
   Montrer que $\mathrm{Im}(f - Id)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(f - Id)$.
   Montrer que la matrice de f dans une certaine base peut s'écrire : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. On définit une transvection par les deux conditions :
   - $\mathrm{Im}(f - Id)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(f - Id)$
   - $\mathrm{Ker}(f - Id)$ est un sous-espace de dimension $n-1$.
   Montrer que toute transvection peut se représenter matriciellement sous la forme de la question précédente.

$\boxed{23}$ *ESPCI*

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ f(M) \geqslant 0$.
Montrer que f est une combinaison linéaire des formes linéaires $\varphi_X : M \mapsto X^\top M X$ avec $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

III. Divers

24 *CCP MP (exercice 60)*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. f est-il surjectif ?
3. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

25 *CCP MP (exercice 90)*

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}^3 \\ P & \mapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. *Application :* On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1)$, $B(1,3)$ et $C(2,1)$.
   Déterminer une fonction polynômiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

26 *CCINP*

Soit E un espace vectoriel de dimension n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker}u = F$ et $\mathrm{Im}u = G$ si et seulement si $\dim F + \dim G = n$.

27 *CCINP*

Soit E un espace vectoriel de dimension n (où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$).
Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, on pose $f^0 = \mathrm{id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.
On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est un *endomorphisme cyclique* s'il existe $e_1 \in E$ tel que $(e_1, f(e_1), \ldots, f^{n-1}(e_1))$ est une base de E.

1. On suppose ici $n = 3$. On note $\mathscr{B}$ une base de E.
   Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.
   Déterminer $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f^2)$. En déduire que f est cyclique.
2. On considère dans cette question $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $f : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
   (a) Soit $Q \in E$ tel que $\deg(Q) \geqslant 1$. Montrer que $\deg(f(Q)) = \deg(Q) - 1$.
   En déduire que f n'est pas bijectif.
   (b) L'endomorphisme f est-il cyclique ? (*Indication :* Calculer $\deg(f^j(X^k))$.)
3. On suppose ici que $\mathrm{Ker}(f^{n-1}) \neq E$ et $\mathrm{Ker}(f^n) = E$.
   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
   (b) Montrer que f est cyclique.
4. On suppose ici que f est cyclique. Montrer que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
5. On suppose ici que f est diagonalisable. Montrer que f est cyclique si et seulement si ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

28 *CCP MP*

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère la matrice carrée d'ordre n à cœfficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.
3. Justifier que la matrice A_n est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A_n ?

29 *CCP MP (exercice 84)*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

30 *CCP MP (exercice 89)*

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

31 *Mines-Ponts*

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^\top$ sont semblables.

32 *Centrale-Supélec*

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donnée, on pose $\varphi(M) = AM + MA$.
Calculer la trace de φ.

33 *CCINP*

1. Soit f un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie E.
   Établir une relation entre le rang et la trace de f.
2. Soit f un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg} f = \mathrm{tr} f = 1$. Montrer que f est un projecteur.

34 *ESPCI*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que si $p + q$ est une symétrie alors $p + q = \mathrm{Id}$.

$\boxed{35}$ *CCINP*

1. Montrer que l'ensemble V des suites complexes vérifiant $v_{n+3} = v_{n+2} + v_n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. Montrer que $P = X^3 - X^2 - 1$ admet un unique racine réelle et deux racines complexes conjuguées.
3. Montrer que $\Phi(v) = (v_0, v_1, v_2)$ définit un isomorphisme de V dans $\mathbb{C}^3$ et en déduire la dimension de V.
4. Trouver les suites géométriques de V et en déduire une base de V.
5. *Ajout :* Proposer une autre méthode pour déterminer une base de V.

$\boxed{36}$ *Mines-Ponts*

Soit f et g des endomorphismes de E espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f)$.

$\boxed{37}$ *Mines-Ponts*

Montrer que si F et G sont deux sous-espaces de même dimension d'un espace vectoriel de dimension finie alors ils admettent un supplémentaire commun.

$\boxed{38}$ *CCINP*

Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 + 4$ dans $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{39}$ *Centrale*

1. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)$.
2. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X+1)P(X)$.

$\boxed{40}$ *ENS*

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0\}$ et $F = \{A^2 + B^2; (A,B) \in \mathbb{R}[X]^2\}$.

1. Montrer que F est stable par produit.
2. Montrer que $E = F$.

$\boxed{41}$ *CCINP*

Pour $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. On note $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid\ |z| = 1\}$.

On cherche à savoir s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(\dfrac{3+4i}{5}\right)^n = 1$.

1. Montrer que $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$ puis que $\dfrac{3+4i}{5} \in \mathcal{U}$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note a_k la partie réelle de $(3+4i)^k$ et b_k sa partie imaginaire.
   Exprimer a_{k+1} et b_{k+1} en fonction de a_k et b_k, puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k et b_k sont des entiers relatifs.
3. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, le reste de la division euclidienne de a_k par 5 est 3 le reste de la division euclidienne de b_k par 5 est 4.
   Conclure.
4. Démontrer l'inégalité : $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| \leqslant |\beta - \alpha|$.
5. Question sur une boule ouverte non transmise par le candidat.

$\boxed{42}$ *CCINP*

Soit $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$ et $Q = qX^q - (X^{q-1} + X^{q-2} + \cdots + 1)$.

1. Montrer que 1 est racine de Q.
   On note $R = (X-1) \times Q$. Montrer que $R = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.
2. Soit z une racine complexe de Q.
   On admet pour les questions 2) et 3) que si $|z| = 1$ alors $z = 1$.
   (a) Montrer que $q|z|^q \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$.
   (b) Montrer que si $z \neq 1$ alors $|z| < 1$.
   Indication : On pourra remarquer que si $|z| > 1$ alors pour tout $k \in [\![0, q-1]\!]$, $|z|^k < |z|^q$.
3. Factoriser R' en produit de polynômes.
   Montrer que 1 est racine double de R.
   Montrer que les autres racines de R sont simples.
   Conclure quant à la multiplicité des racines de Q.
4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $Q(A) = 0_n$.
   Montrer que A est diagonalisable.
   Montrer l'existence de la limite de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa nature géométrique.
5. Soit z une racine complexe de Q.
   Montrer que si $|z| = 1$ alors $z = 1$.