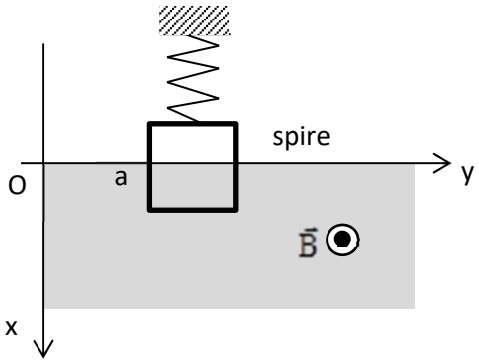
1.7-Induction-Circuit mobile-Exercice 1

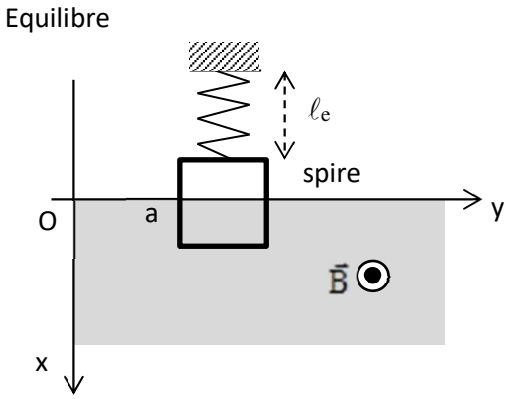
Une spire conductrice de résistance R, de coté a et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k.
A l'équilibre la moitié de la spire plonge dans une région où règne un champ magnétique uniforme et stationnaire. A l'instant t = 0, on abaisse la spire d'une distance a/2.
On repère la spire par l'abscisse x(t) de son centre, comptée à partir de sa position d'équilibre.

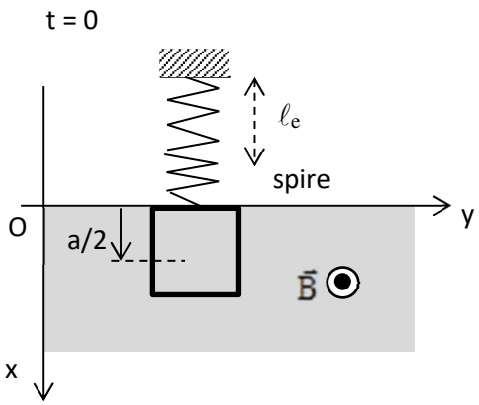
1-A l'aide d'un raisonnement énergétique qualitatif, expliquer pourquoi $x(t) < a/2$ pour $t > 0$.

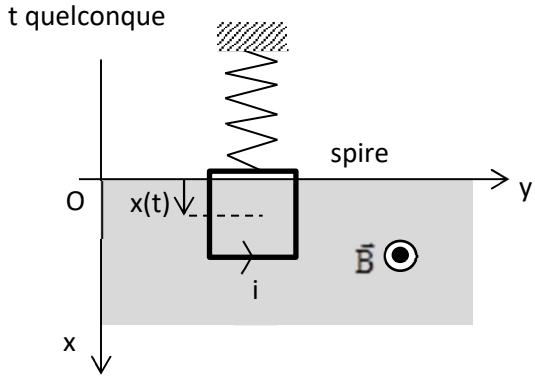
2-Etablir l'équation différentielle vérifiée par x(t)

3-Décrire les solutions possibles de cette équation différentielle.









1.7-Induction-Circuit mobile-Exercice 1

1-A t = 0 on a x(0) = a/2. La spire plonge entièrement dans le champ magnétique.

En l'absence de champ magnétique, et si on néglige les frottements, la spire est soumise à son poids et à la force élastique qui sont des forces conservatives. L'énergie mécanique de la spire est alors constante : la spire va osciller sinusoïdalement entre x = a/2 et x = - a/2.

En présence d'un champ magnétique il va y avoir apparition d'un courant induit dans la spire. Celle-ci va être soumise à des forces de Laplace qui, d'après la loi de Lenz, vont la freiner. Son énergie mécanique va décroître au cours du temps jusqu'au retour à l'équilibre. La spire ne va plus jamais redescendre jusqu'en x = a/2.
On peut donc affirmer que x(t) < a/2 pour tout t > 0.

2- Force de Laplace sur la spire : $\vec{F}_L = \int_{spire} id\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_0^a idy\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_z = iaB\vec{u}_x$

(Les forces de Laplace sur les côtés verticaux se compensent).

Loi de la quantité de mouvement dans *R* galiléen : $m\ddot{x} = mg - k(\ell_e + x - \ell_0) + iaB$

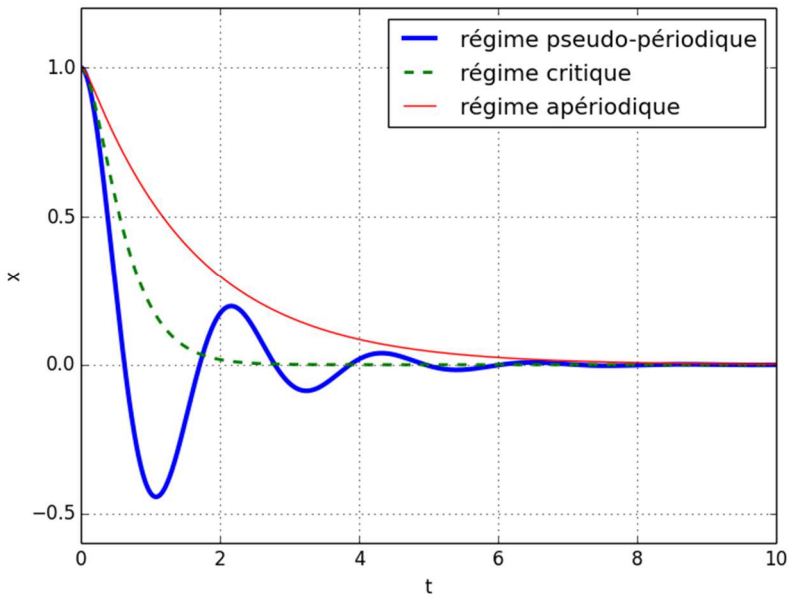
A l'équilibre la loi de la quantité de mouvement donne : $0 = mg - k(\ell_e - \ell_0)$

Il reste $m\ddot{x} = -kx + iaB$

Loi des mailles : $e = Ri$

Loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ avec $\Phi = Ba(x + a/2)$ = flux magnétique à travers la spire orientée

donc : $e = -Ba\dot{x}$ puis $i = -\frac{Ba\dot{x}}{R}$

Finalement : $m\ddot{x} = -kx + (-\frac{Ba\dot{x}}{R})aB$ soit : $\boxed{\ddot{x} + \frac{B^2a^2}{mR}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$

3-Suivant la valeur du discriminant de l'équation caractéristique, on a un régime pseudo-périodique, apériodique ou critique.