OM_1 Outils mathématiques : fonction de plusieurs variables

PCSI$_2$ 2024 – 2025

Certaines parties de ce chapitre ne seront utiles qu'à partir de l'année prochaine, mais une grande partie nous servira dès cette année.

I Définition

Définition : Une fonction à plusieurs variables réelles est une fonction dont l'ensemble de départ est une partie de $\mathbb{R}^n$ avec n un entier qui est le nombre de variables réelles.

$$f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Exemple : $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$
Nous avons déjà manipulé ces fonctions cette année : par exemple pour la propagation d'onde le long d'une corde. Lorsque l'on parle de l'altitude de la corde z, elle dépend de la position x et de l'instant considéré t : $z(x, t)$.

Définition : En physique un champ est la donnée d'une grandeur physique pour chaque point de l'espace et pour chaque instant. Un champ peut-être dit scalaire ou vectoriel en fonction du type de la grandeur physique. Mathématiquement, un champ correspond à une fonction de plusieurs variables (en général 3 d'espace et une de temps).

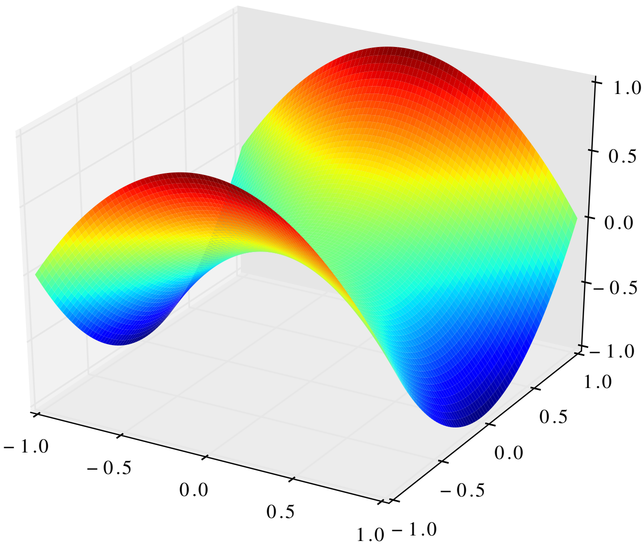
Exemples :

- Température, pression ou concentration dans une pièce (dépend de x, y, z, t) : champ scalaire.
- Vitesse dans un fluide : $\vec{v}(x, y, z, t)$ champ vectoriel
- Champ de force central : $\vec{F}(r, \theta, \varphi) = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r(\theta, \varphi)$
- Champ électrique : $\vec{E}$
- ...

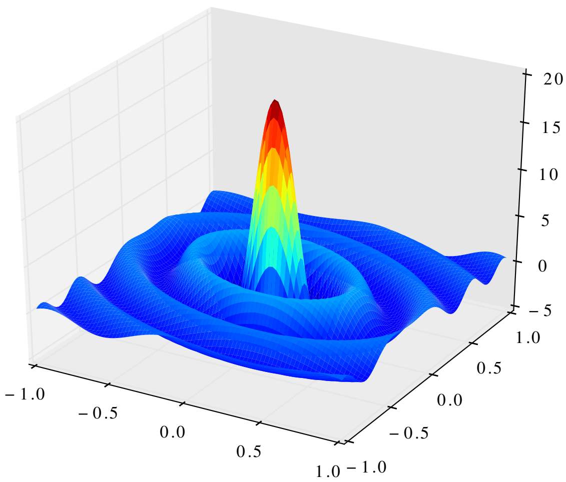
II Représentation

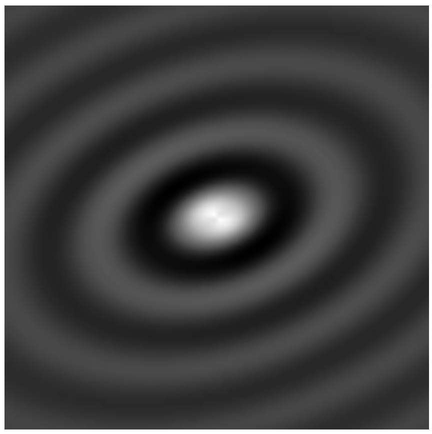
Pour les fonctions d'une variable, on a l'habitude de représenter la courbe $y = f(x)$. Pour les fonctions de plusieurs variables, c'est plus délicat vu que la fonction dépend de plusieurs paramètres.

Cas de deux variables Dans le cas de deux variables, on peut étendre le tracé habituel en ne traçant pas une courbe mais une surface dans l'espace : $z = f(x, y)$.
C'est difficile à faire à la main mais on sait bien le faire à l'ordinateur. On peut aussi faire une représentation via une image, les couleurs représentant les valeurs de la fonction.
Par exemple pour $f(x, y) = -x^2 + y^2$:



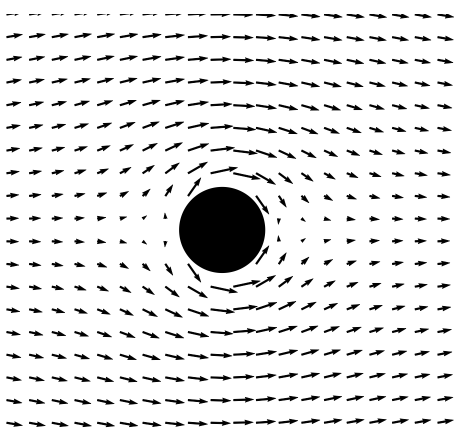
$$f(x, y) = \frac{\sin(20\sqrt{0.5x^2 + y^2 + 0.4xy})}{\sqrt{x^2 + y^2 + 0.4xy}}$$





Pour les champs de vecteurs, il existe plusieurs méthodes. La plus simple est de représenter les vecteurs en quelques points de l'espace.

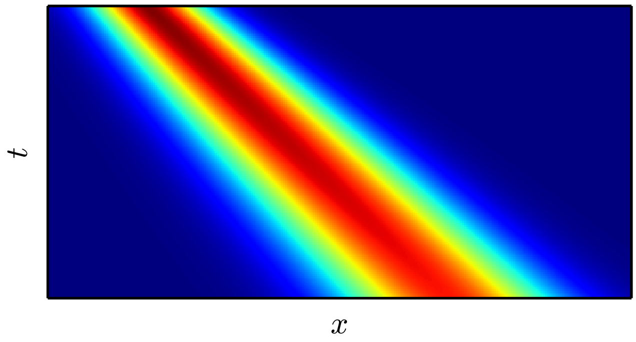
Par exemple pour le champ des vitesses dans un écoulement de fluide autour d'une sphère :



Au delà de deux variables, on ne représente généralement que des coupes pour se ramener à deux variables (slicing en python).

Pour représenter une évolution au cours du temps, on peut aussi utiliser des diagrammes spatio-temporels.

Par exemple, l'évolution de l'altitude d'une corde en fonction de sa position et du temps $z(x, t)$ peut être représentée sur un diagramme spatio-temporel. On voit ici que l'onde se propage (on peut mesurer la vitesse en regardant la pente de la courbe) et s'élargit.



III Dérivée partielle

1. Dérivée première

Définition : Soit $f(x, y, z)$ une fonction de plusieurs variables. On appelle dérivée partielle (si elle existe) de f par rapport à x la dérivée de la fonction d'une seule variable $f_x : x \mapsto f(x, y, z)$ en considérant y et z comme constants. Elle est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \textbf{ou} \quad \partial_x f$$

∂ se lit « d rond » et est réservé pour les dérivée partielle. En physique, on s'intéresse à des grandeurs plutôt qu'à des fonctions et on note souvent

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$$

ce qui se lit « à y et z constant » pour indiquer quelles sont les autres variables considérées.

Exemples :

- Volume d'un cylindre : $V(r, h) = \pi r^2 h$
  $\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h$ $\qquad$ $\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$
- $f(x, y) = \frac{1}{6}x^3y^2 + x^2 - y^4$
  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}x^2y^2 + 2x - 0$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}x^3y + 0 - 4y^3$

Remarque :
dimensionnellement $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{[f]}{[x]}$

2. Dérivée d'ordre supérieur

De même que pour les fonctions d'une variable, il est possible de dériver plusieurs fois une fonction de plusieurs variables. On les note (pour les dérivées d'ordre 2) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial_{xx} f \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial_{yx} f \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \partial_{xy} f \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \partial_{yy} f$$

3. Théorème de Schwarz

Si l'on reprend l'exemple précédent : $f(x,y) = \frac{1}{6}x^3y^2 + x^2 - y^4$, alors

$$\partial_{xx}f(x,y) = xy^2 + 2 \qquad \partial_{yx}f(x,y) = x^2y + 0 \qquad \partial_{xy}f(x,y) = x^2y - 0 \qquad \partial_{yy} = \frac{1}{3}x^3 - 8y$$

On constate que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Ce résultat est en fait assez général.

> **Théorème de Schwarz : Soit f une fonction de plusieurs variables dont les dérivées partielles existent et sont continues. Le résultat d'une dérivation d'ordre supérieur à 1 ne dépend pas de l'ordre dans lequel se fait la dérivation par rapport aux variables considérées.**

Ce théorème ne nous sera pas utile cette année mais il le sera pour vous l'an prochain.

4. Différentielle

Dans le cas d'une fonction d'une variable, la dérivée représente la limite du taux d'accroissement, ainsi $f'(x)dx$ correspond à la variation de la fonction f entre les points infiniment proche x et $x + dx$.

> **Définition : Pour une fonction $f(x, y, \ldots)$ de plusieurs variables, on appelle différentielle de f la variation infinitésimal de f lors que les grandeurs x, y,...varient de façon infinitésimale. C'est-à-dire :**
>
> $$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Cette manière de considérer les différentielles est celle introduite par Leibniz et toujours utilisées par les physiciens car très pratique.
Exemple : Volume d'un cylindre $V = \pi r^2 h$

$$\mathrm{d}V = 2\pi r h \mathrm{d}r + \pi r^2 \mathrm{d}h$$

Ce qui permet d'estimer que pour un cylindre de 1 m de rayon et 2 m de haut dont le rayon croît de 1 mm et la hauteur de 3 mm, la variation de volume sera environ

$$V' - V = 2\pi \times 1 \times 2 \times 10^{-3} + \pi 1^2 \times 3.10^{-3} \simeq 0,022 \text{ m}^3 = 22 \text{ L}$$

L'écart avec la valeur exact est ici de $0,1$ % et tend vers 0 lors que $\mathrm{d}r$ et $\mathrm{d}h$ tendent vers 0.

5. Équation aux dérivées partielles

> **Définition : On appelle équation aux dérivées partielles une équation qui relie une fonction de plusieurs variables f à ses dérivées partielles.**

Remarques :

— Ces équations sont très fréquentes en physiques, par exemple propagation d'une onde sans dispersion ou atténuation selon $+\vec{e}_x$: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial z}{\partial t}$

— Ces équations sont en général très difficile à résoudre.

Par exemple l'équation suivante $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$ s'intègre une première fois $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(y)$ puis $f(x,y) = g(y) \times x + h(y)$. Les « constantes » d'intégration sont donc ici des fonctions des autres variables qu'il faut déterminer entièrement !

IV Opérateur gradient

1. Définition et interprétation géométrique

Cet opérateur nous servira dès cette année (en statique des fluides).

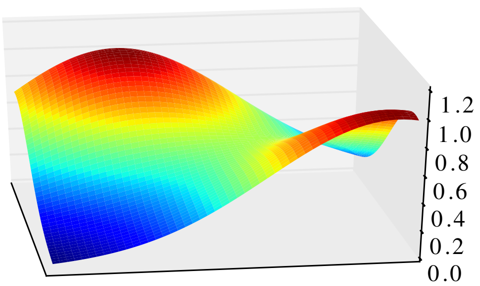
Définition : Soit $f(x,y,z)$ un champ scalaire (i.e. une fonction des variables d'espace dont la valeur est un scalaire et non pas un vecteur). On appelle gradient de f (noté $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$) le champ vectoriel tel que

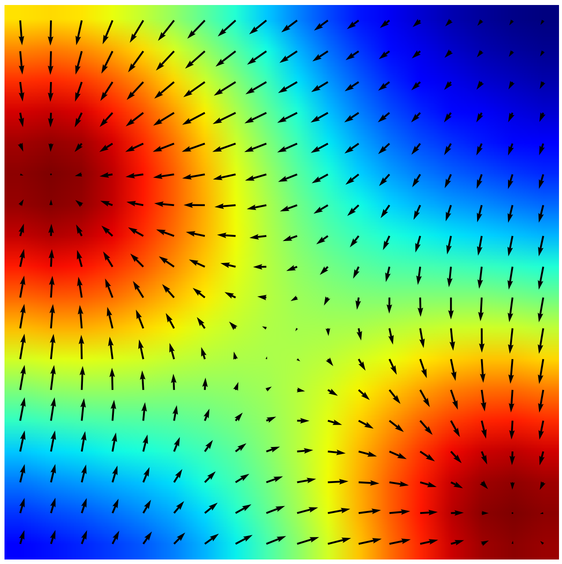
$$\overrightarrow{\textbf{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}f \qquad (\overrightarrow{\mathrm{d}l} \text{ le déplacement élémentaire})$$

Géométriquement, le gradient « pointe » dans la direction selon laquelle la fonction croît le plus.

Remarques :

- $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ est parfois noté $\vec{\nabla} f$
- En physique, on s'intéresse tout particulièrement à $-\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ qui pointe dans la direction selon laquelle la fonction décroit le plus. Si je pose une bille sur une surface d'équation $z = f(x,y)$, elle va partir selon $-\overrightarrow{\text{grad}}\, f$.





2. Expression dans les différents systèmes de coordonnées

2.a. Cartésiennes

On pose $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$, où (A_x, A_y, A_z) sont les composantes du gradient que l'on cherche à déterminer.

On part de la définition ensuite

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}f$$

or $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$ et $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$

d'où

$$\forall \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z \quad ; \quad A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

On en déduit $A_x = \frac{\partial f}{\partial x}$; $A_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ et $A_z = \frac{\partial f}{\partial z}$

L'expression en coordonnées cartésiennes est donc : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \left|\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array}\right.$

3. Coordonnées cylindro-polaires

On procède de même, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_z\vec{e}_z$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}f \Rightarrow$$

$$A_r\mathrm{d}r + A_\theta r\mathrm{d}\theta + A_z\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

L'expression en coordonnées cylindro-polaire est donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \left|\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array}\right.$$

4. Coordonnées sphériques

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_\varphi\vec{e}_\varphi$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}f \Rightarrow$$

$$A_r\mathrm{d}r + A_\theta r\mathrm{d}\theta + A_\varphi r\sin\theta\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi$$

L'expression en coordonnées sphériques est donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \left|\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{array}\right.$$

5. Gradient et circulation

Rappel : La circulation d'un champ de vecteur $\vec{F}$ est l'intégrale de la quantité $\vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$ le long d'une courbe. Pour un gradient :

$$\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_A^B df = f(B) - f(A) \qquad (= f(x_B, y_B, z_B) - f(x_A, y_A, z_A))$$

6. Gradient et mécanique

Nous avons vu la définition de l'énergie potentielle suivante : $\mathrm{d}E_p = -\vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$ d'où la relation

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_p$$

Table des matières