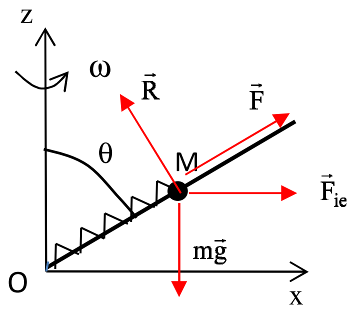
4.2.2 Dynamique référentiels en rotation-Exercice 5

Une particule M de masse m se déplace sans frottement sur une tige qui tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical Oz.

La tige est inclinée de l'angle θ constant par rapport à la verticale.
Le ressort a une raideur k et une longueur à vide ℓ_0.

a-Déterminer les positions d'équilibre de M par rapport à la tige.

b-Déterminer l'équation du mouvement de M le long de la tige.



---

a-R(Oxyz) : référentiel du laboratoire galiléen
R'(Ox'y'z) : référentiel non galiléen lié à la tige, celle-ci étant dans le plan Ox'z

A l'équilibre dans R', la particule est soumise à :

- Son poids : $m\vec{g}$
- La réaction normale $\vec{R}$ de la tige
- La force élastique : $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}$ $\vec{u}$ vecteur unitaire selon la tige
- La force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{HM} = m\omega^2\ell\sin\theta\vec{u}_{x'}$

<u>Loi de la quantité de mouvement</u> dans R' en projection selon $\vec{u}$: $0 = -k(\ell-\ell_0) - mg\cos\theta + m\omega^2\ell\sin^2\theta$

D'où : $(k - m\omega^2\sin^2\theta)\ell_{eq} = k\ell_0 - mg\cos\theta$

Donc : $\boxed{\ell_{eq} = \dfrac{k\ell_0 - mg\cos\theta}{k - m\omega^2\sin^2\theta}}$

Que l'on peut écrire : $\ell_{eq} = \dfrac{\ell_{eq}(\omega=0)}{1 - \dfrac{m}{k}\omega^2\sin^2\theta}$ avec $\ell_{eq}(\omega=0) = \ell_0 - \dfrac{mg}{k}\cos\theta \le \ell_0$

Au début on part de $\ell_{eq}(\omega=0)$ puis on fait croître ω. ℓ_{eq} augmente car le dénominateur diminue.

Quand ω se rapproche de $\sqrt{\dfrac{k}{m\sin^2\theta}}$ alors ℓ_{eq} tend vers l'infini. Le ressort casse.

b-Il y a la force d'inertie de Coriolis en plus mais elle est perpendiculaire à la tige donc n'intervient pas en projection le long de la tige.

<u>Loi de la quantité de mouvement</u> dans R' en projection selon $\vec{u}$: $m\ddot{\ell} = -k(\ell-\ell_0) - mg\cos\theta + m\omega^2\ell\sin^2\theta$

Soit : $\boxed{\ddot{\ell} + (\dfrac{k}{m} - \omega^2\sin\theta)\ell = \dfrac{k}{m}\ell_0 - g\cos\theta}$
