3.5-Statique fluides-Exercice 13

On lâche un ballon-sonde rempli d'hélium de masse molaire M_{He} dans la troposphère. L'enveloppe du ballon a une masse m et un volume constant V_0. On note P_0 la pression atmosphérique au niveau du sol.
La température de l'air, assimilé à un gaz parfait, varie selon $T(z) = T_0 - az$ où z est l'altitude.

a-Montrer qu'il y a bien une élévation du ballon.

b-Montrer que $P(z) = P_0(1-\beta z)^{\alpha}$. Expliciter les constantes α et β.

c-On donne le théorème de Gauss gravitationnel : $\displaystyle\oiint_{(S)\,\text{fermée}} \vec{g}(P).d\vec{S}(P) = -4\pi G m_{\text{int érieure à (S)}}$

Montrer qu'au voisinage de la surface de la Terre : $g(z) = \dfrac{GM_T}{(R_T + z)^2}$

Calculer la variation relative de g entre z = 0 et z = 20 km.

d-Trouver l'altitude maximale atteinte par le ballon.

e-Sans calcul, prédire si l'altitude maximum atteinte serait plus ou moins élevée si, le volume restant le même, l'hélium était petit à petit remplacé par de l'air.

Données : $m = 10$ kg ; $V_0 = 100$ m^3 ; $M_{air} = 29$ g.mol^{-1} ; M_{He}, = 4 g.mol^{-1} ; $a = 5.10^{-3}$ K.m^{-1}
$T_0 = 284$ K ; $P_0 = 105$ Pa ; $R = 8{,}314$ J.K^{-1}.mol^{-1} ; $g = 9{,}81$ m.s^{-2} ; $R_T = 6400$ km

---

3.5-Statique fluides-Exercice 13

---

a-Poids du ballon et de l'hélium qu'il contient : $m_{tot}\vec{g} = [m + \mu_{He}(z=0)V_0]\vec{g} = [m + \frac{M_{He}P_0}{RT_0}V_0]\vec{g}$

Poussée d'Archimède sur le ballon : $\vec{\Pi}_A = -\mu_{air}(z=0)V_0\vec{g} = -\frac{M_{air}P_0}{RT_0}V_0\vec{g}$

A.N : $m_{tot}g = 264$ N $\qquad \Pi_A = 1205$ N

La poussée d'Archimède l'emporte sur le poids donc le ballon va s'élever.

b- Equation de la statique des fluides pour l'air en équilibre dans le champ de pesanteur uniforme : $\frac{dP}{dz} = -\mu_{air}g$

=> $\frac{dP}{dz} = -\frac{M_{air}P}{RT}g$ => $\frac{dP}{dz} = -\frac{M_{air}P}{R(T_0 - az)}g$ => $\frac{dP}{P} = -\frac{M_{air}gdz}{R(T_0 - az)}$ => $\frac{dP}{P} = -\frac{M_{air}gdz}{RT_0(1 - \frac{a}{T_0}z)}$

On intègre entre z = 0 et z : $\mathrm{Ln}\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \frac{M_{air}g}{aR}\mathrm{Ln}(1 - \frac{a}{T_0}z)$

Donc : $\boxed{P(z) = P_0(1 - \frac{a}{T_0}z)^{\frac{M_{air}g}{aR}}}$ $\qquad$ On a : $\beta = \frac{a}{T_0}$ et $\alpha = \frac{M_{air}g}{aR}$

c-Le théorème de Gauss donne : $-4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M_T$ $\qquad$ Donc : $g(r) = \frac{GM_T}{r^2}$ ou $g(z) = \frac{GM_T}{(R_T + z)^2}$

Variation relative : $\frac{g(0) - g(z)}{g(0)} = 1 - \frac{R_T^2}{(R_T + z)^2}$ $\qquad$ A.N : $\frac{g(0) - g(20)}{g(0)} = 6.10^{-3}$ << 1

On peut suppose le champ de pesanteur uniforme sur 20 km d'altitude.

d-A l'altitude maximale atteinte, le poids du ballon est égal à la poussée d'Archimède :

$$[m + \frac{M_{He}P_0}{RT_0}V_0]g = \mu_{ait}(z)V_0 g$$

On a : $\mu_{ait}(z) = \frac{M_{air}P(z)}{RT(z)} = \frac{M_{air}P_0(1 - \beta z)^{\alpha}}{R(T_0 - az)} = \frac{M_{air}P_0(1 - \beta z)^{\alpha}}{RT_0(1 - \frac{a}{T_0}z)} = \mu_{air}(z=0)(1 - \beta z)^{\alpha - 1}$

Donc : $[m + \frac{M_{He}P_0}{RT_0}V_0] = \mu_{air}(z=0)V_0(1 - \beta z)^{\alpha - 1}$

On en déduit : $z_{max} = \frac{1}{\beta}\left[1 - \left(\frac{m + \frac{M_{He}P_0}{RT_0}V_0}{\mu_{air}(z=0)V_0}\right)^{\frac{1}{\alpha - 1}}\right]$

A.N : $\alpha = 6{,}84$ $\qquad \beta = 1{,}76.10^{-5}$ $\qquad \mu_{air}(z=0) = 1{,}23$ kg.m^{-3} $\qquad z_{max} = 13$ km

d-Le poids du ballon augmente alors que la poussée d'Archimède reste la même. L'altitude maximale atteinte sera plus faible.
