**4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 2**

---

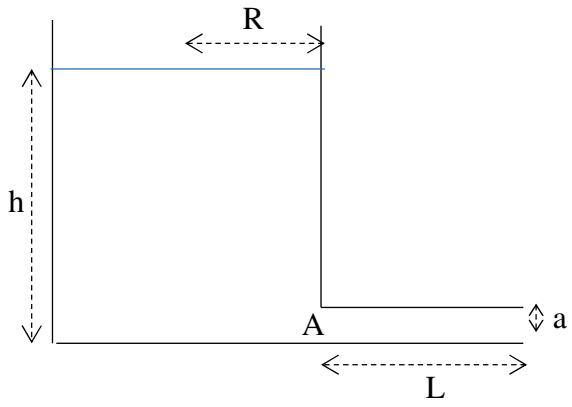
Un fluide incompressible, de masse volumique μ et de viscosité η, s'écoule lentement dans un récipient cylindrique de rayon R et dans un tube capillaire de rayon a << R.

a-Trouver une relation entre $P_{ext}$, P(A), g, h(t) et v(A) en négligeant la viscosité dans le récipient.
Dans la suite on néglige v(A).

b-On donne le débit volumique dans le tube capillaire $Q = \frac{\pi a^4}{8\eta L}(P(A) - P_{ext})$ . A quoi correspond $\frac{\pi a^4}{8\eta L}$ ?

c-Trouver l'équation différentielle vérifiée par h(t).

d-Le fluide met T = 10 min 10 s pour passer de $h_1$ = 15 cm à $h_2$ = 12 cm.
On donne : L = 10 cm ; a = 1 mm ; μ = 1200 kg.m$^{-3}$ ; R = 10 cm. Déterminer η.




---

a-On néglige la viscosité, donc on peut appliquer la relation de Bernoulli (écoulement parfait, incompressible, quasi-stationnaire) entre le point A et un point à la surface où la vitesse est quasi-nulle :

$$\boxed{P(A) + \frac{1}{2}\mu v(A)^2 = P_{ext} + \mu g h}$$

On néglige par la suite v(A) donc : $P(A) = P_{ext} + \mu g h$

b-Par analogie avec la loi d'Ohm sous la forme I = GU, $\frac{\pi a^4}{8\eta L}$ représente la <u>conductance hydraulique</u>.

c-Bilan de volume pour le récipient : V(t+dt) = V(t) - Qdt soit : $\frac{dV}{dt} = -Q$

$$\pi R^2 \frac{dh}{dt} = -\frac{\pi a^4}{8\eta L}(P(A) - P_{ext}) = -\frac{\pi a^4}{8\eta L}\mu g h$$

D'où l'équation différentielle : $\boxed{\frac{dh}{dt} + \frac{\mu g a^4}{8\eta L R^2} h = 0}$ ou $\frac{dh}{dt} + \frac{h}{\tau} = 0$ avec $\tau = \frac{8\eta L R^2}{\mu g a^4}$

d-La solution est : $h = h_0 \exp(-t/\tau)$ On en déduit : $\frac{h_1}{h_2} = e^{-\frac{t_1 - t_2}{\tau}}$ puis : $\mathrm{Ln}\frac{h_1}{h_2} = \frac{t_2 - t_1}{\tau} = \frac{\mu g a^4}{8\eta L R^2}(t_2 - t_1)$

D'où : $\boxed{\eta = \frac{\mu g a^4 (t_2 - t_1)}{8 L R^2 \mathrm{Ln}\frac{h_1}{h_2}}}$ A. N : <u>$\eta = 4.10^{-3}$ Pl</u>

---