

Applications linéaires - développements limités et intégration

DM 12

Exercice 1 :

Dans une ville, une proportion p des foyers pense que les chocolats de Pâques sont apportés par le lapin de Pâques, et $1 - p$ par des cloches.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Le dimanche de Pâques, le lapin de Pâques rend visite à n foyers pour déposer des oeufs en chocolat.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de foyers (parmi ces n foyer visités) qui savent que c'est le lapin qui a fait le travail. Donnez la loi de X , son espérance et sa variance, en fonction de n et p .
2. Quand le lapin visite un foyer qui croit au lapin de Pâques, il a 1 chance sur 3 d'être repéré par les habitants. Ceux qui croient aux cloches ne peuvent pas le repérer (ils regardent en l'air). Calculez en fonction de n et p la probabilité que le lapin soit repéré (au moins une fois) à l'issue de sa tournée.

1. X compte le nombre de "succès" (le foyer croit au lapin) dans une répétition de n expérience de Bernoulli, toutes identiques et indépendantes. Ainsi $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, et $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$

2. Soit R l'événement "le lapin a été repéré au moins une fois".

On s'intéresse à $\bar{R}$: le lapin n'a pas été repéré.

Première version :

Pour comprendre ce qu'on va faire : imaginons que le lapin ne visite qu'un foyer : ce foyer est soit un foyer croyant au lapin, soit n'y croyant pas. Il s'agirait donc de faire des probabilités totales avec les événements " L : croit au lapin" et " C : croit au cloche" pour obtenir $P(\bar{R}) =$

$$P(L)P_L(\bar{R}) + P(C)P_C(\bar{R}) = p\frac{2}{3} + 1 - p$$

Dans notre expérience, on a n foyer visité, et le partitionnement pour les probas totales va donc se faire selon les valeurs de X .

En effet, $(X = i)_{0 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements.

$$\text{Ainsi, } P(\bar{R}) = \sum_{i=0}^n P(X = i)P_{X=i}(\bar{R}).$$

Or, sachant $(X = i)$, le lapin a visité i foyers pouvant le repérer, chacun ayant une probabilité de $\frac{2}{3}$ de ne pas le repérer. Les $n - i$ foyer restants sont sûrs de ne pas le voir. Ainsi, par

indépendance des repérages (non supposée, mea culpa, mais "intuitive") $P_{X=i}(\bar{R}) = \left(\frac{2}{3}\right)^i \times 1$

$$\text{Ainsi, } P(\bar{R}) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \sum_{i=0}^n n \left(\frac{2p}{3}\right)^i (1-p)^{n-i} = \left(\frac{2p}{3} + 1 - p\right)^n = \left(1 - \frac{p}{3}\right)^n$$

$$\text{Et finalement } \boxed{P(R) = 1 - \left(1 - \frac{p}{3}\right)^n}.$$

Deuxième version :

Une autre version de cette solution consiste à raisonner sur la probabilité d'être repéré étant donné un foyer pris au hasard.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose R_i l'événement : "être repéré par le i ème foyer".

Avec les mêmes notations que dans la solution 1, on applique les probas totale avec le sce (L, C)

pour obtenir : $P(R_i) = P(L)P_L(R_i) + P(C)P_C(R_i) = p\frac{1}{3} + 0$.

Posons Y la variable aléatoire donnant le nombre de fois où le lapin est repéré. Il s'agit de faire la somme des R_i , qu'on suppose indépendants, donc $Y \sim \mathcal{B}(n, \frac{p}{3})$

"le lapin est repéré" est l'événement $(Y > 0)$, et on a

$$P(Y > 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \left(1 - \frac{p}{3}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{p}{3}\right)^n$$

ce qui donne le même résultat que notre première solution.

Exercice 2 :

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (-2x + y + 2z, -x + y + z, -2x + y + 2z)$$

1. Montrez que f est linéaire.
2. Soit $p = f \circ f$. Justifiez que p est linéaire et calculez $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Montrez que $p \circ p = p$.
4. Montrez que p est un projecteur dont on précisera les caractéristiques.

1. c'est une vérification basique. voir d'autres corrigés/TD.
2. Par composition d'application linéaire, p est linéaire. On remplace successivement pour avoir la formule donnant $p(x, y, z)$, mais désormais on a l'outil magique "matrice" :
Le plus efficace est de travailler avec les matrices : comme $f(1, 0, 0) = (-2, -1, -2)$, $f(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (2, 1, 2)$, f a pour matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi $p = f \circ f$ a pour matrice $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Et comme $A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + z \\ -x + y + z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$ on en déduit

$$p(x, y, z) = (-x + y + z, -x + y + z, -x + y + z)$$

3. On compose deux fois, ou alors on utilise la matrice, et on observe que $A^2 \times A^2 = A^2$ ainsi, $p \circ p = p$
4. $p^2 = p$ donc p est un projecteur. Au moment où vous aviez le DM, vous deviez tout faire à la main, mais on peut ici observer immédiatement via la matrice que $\text{Im } p = \text{Vect}((1, 1, 1))$, donc $\text{rg}(p) = 1$.

Le théorème du rang donne alors $\dim(\text{Ker } p) = 3 - 1 = 2$.

Toujours avec la matrice : on voit que $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, -1)$ sont dans le noyau (soit en calculant le produit, soit en remarquant que $C_1 + C_2 = 0$ et $C_2 - C_3 = 0$).

Les deux vecteurs sont non colinéaires et constituent donc une base du noyau, d'où

$$\text{Ker } p = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, -1))$$

Ainsi p est un projecteur sur la droite $\text{Vect}((1, 1, 1))$, de direction le plan $\text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, -1))$.

Exercice 3 :

Soient f et G les fonctions définies par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\ln(1+t^2)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad G(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$$

1. ETUDE DE f
 - a) Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$ et étudiez sa parité.
 - b) Déterminez le développement limité à l'ordre 3 de f en 0. Que vaut $f'(0)$?
2. ETUDE LOCALE DE G
 - a) Justifiez que G est définie sur $\mathbb{R}$.
 - b) Montrez que $\int_{-x}^x f(t) dt = 0$ et étudiez la parité de G .
 - c) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Exprimez G en fonction de F et en déduire que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
 - d) Exprimez $G'(x)$ en fonction de $f(x^2)$ et $f(x)$, et déterminez un développement limité en 0 à l'ordre 4 de G .
 - e) Donnez une équation cartésienne de la tangente à la courbe de G en 0 et précisez la position de la courbe de G par rapport à sa tangente au voisinage de 0. En déduire que G admet un extremum local en 0 que vous préciserez (minimum ou maximum, et valeur).

1. Etude de f

- a) f est définie sur $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}^*$ par composition de fonctions continues. Regardons la limite quand $t \rightarrow 0$. Comme $t^2 \rightarrow 0$, on a $\ln(1+t^2) \underset{0}{\sim} t^2$, donc $f(t) \underset{0}{\sim} t^2/2 = t$. On a donc $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.

De plus, on a immédiatement $f(-t) = -f(t)$, donc f est impaire.

- b) On veut un DL à l'ordre 3 mais on va diviser par t : on cherche donc un DL à l'ordre 4 du numérateur.

Comme on va composer par une puissance de t , il suffit de partir d'un $DL_2(0)$:

$$\ln(1+t) \underset{0}{=} t - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \text{ donc } \ln(1+t^2) \underset{0}{=} t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4)$$

Enfin :

$$f(t) \underset{0}{=} t - \frac{t^3}{2} + o(t^3)$$

Ainsi f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 1$.

2. Etude des variations de G

- a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle peut être intégrée sur n'importe quel intervalle de $\mathbb{R}$, en particulier sur tout intervalle de la forme $[x, x^2]$ ou $[x^2, x]$. Ainsi $G(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on va faire le changement de variable $u = -x$ (comme en TD...), donc $du = -dx$ et on a, en utilisant l'impairité :

$$\int_{-x}^x f(t)dt = - \int_x^{-x} f(-u)du = \int_x^{-x} f(u)du$$

Au final, la variable t étant muette, on a donc :

$$\int_{-x}^x f(t)dt = - \int_{-x}^x f(t)dt$$

donc

$$\int_{-x}^x f(t)dt = 0$$

Maintenant, regardons $G(-x)$ et avec la relation de Chasles, il vient :

$$G(-x) = \int_{-x}^{x^2} f(t)dt = \int_{-x}^x f(t)dt + \int_x^{x^2} f(t)dt = \int_x^{x^2} f(t)dt = G(x)$$

Donc G est paire.

- c) Posons F une primitive de f . Comme f est continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x^2) - F(x)$. Ainsi G , par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$, est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
- d) On dérive, et en utilisant les propriétés de dérivation de la composée, on a immédiatement pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x)$$

On a déjà le DL de f : $f(x) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$, donc $f(x^2) = x^2 + o(x^3)$ et $2xf(x^2) = 2x^3 + o(x^3)$

Ainsi, $G'(x) = -x + \frac{5}{2}x^3 + o(x^3)$

On intègre ce DL pour obtenir celui de G en remarquant que $G(0) = 0$ et il vient :

$$G(x) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{8}x^4 + o(x^4)$$

- e) D'après le développement limité obtenu précédemment, la courbe représentative de G admet une tangente d'équation $y = 0$, et comme $G(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, on en déduit que la courbe de G est en dessous de cette tangente horizontale. Autrement dit, G admet un maximum local en 0, donné par $G(0) = 0$.