Applications linéaires - intégration - séries
DM 13

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}j$.
On définit les polynômes A et B par

$$A(X) = X^2 - 1 \text{ et } B(X) = 2X$$

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit l'application Φ par

$$\Phi(P) = AP'' + BP'$$

1. Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Déterminer la matrice M de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Vous représenterez la matrice en utilisant des $\dots$, $\vdots$ et $\ddots$ étant donné qu'on est en dimension indéfinie.
3. Φ est-elle bijective ?
4. On suppose maintenant $n = 3$.
Ecrire M dans ce cas. Déterminez Ker$M$ et en déduire le noyau de Φ.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $deg(P) \leq n$, $deg(P') \leq n-1$ et $deg(P'') \leq n-2$
Comme A est de degré 2, $deg(AP'') \leq n-2+2 = n$ et comme B est de degré 1, $deg(BP') \leq n$.
Ainsi, $deg(AP'' + BP') \leq max(deg(AP''), deg(BP')) \leq n$
On a bien $deg(\Phi(P)) \leq n$, c'est à dire $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$
On a donc montré le côté "endo". Reste à montrer la linéarité :
Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a
$$\Phi(\lambda P + \mu Q) = A(\lambda P + \mu Q)'' + B(\lambda P + \mu Q)'$$
Par linéarité de la dérivation, on a :
$$\Phi(\lambda P + \mu Q) = A(\lambda P'' + \mu Q'') + B(\lambda P' + \mu Q') = \lambda(AP'' + BP') + \mu(AQ'' + BQ') = \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q)$$
Donc Φ est bien linéaire et c'est un endomorphisme.
2. Avec $P = 1$, on a $P' = 0$ et $P'' = 0$, d'où $\Phi(P) = 0$
De même, avec $P(X) = X$, on a $P'(X) = 1$ et $P''(X) = 0$ d'où $\Phi(P) = B(X) = 2X$
Puis, pour $k \geq 2$, avec $P(X) = X^k$ et il vient $P'(X) = kX^{k-1}$ et $P''(X) = k(k-1)X^{k-2}$
Alors
$$\begin{aligned} \Phi(X^k) &= (X^2-1)k(k-1)X^{k-2} + 2XkX^{k-1} \\ &= (k(k-1) + 2k)X^k - k(k-1)X^{k-2} \\ &= k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2} \end{aligned}$$
Il s'agit de traduire en matrice ce que l'on vient de faire :
$\Phi(X^0) = 0$ donc la première colonne est $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
De $\Phi(X^1) = 2X$, on déduit la deuxième colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
Ensuite, pour $k \geq 2$ et $\Phi(X^k)$, la $k - 2$ +1 ème ligne va avoir comme coefficient $-k(k-1)$ et la $k+1$ ième avec $k(k+1)$, ce qui donne la matrice suivante, constituée de $n+1$ colonnes et $n+1$ lignes
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

3. La première colonne de la matrice est nulle, ce qui traduit un noyau non réduit au polynôme nul. Par conséquent, M n'est pas inversible, et donc Φ n'est pas bijective.
4. Pour $n=3$ on obtient comme matrice

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Cherchons Ker$M$:

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2c & =0 \\ 2b-6d & =0 \\ 6c & =0 \\ 12d & =0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}, b=0, c=0 \text{ et } d=0$$

Ainsi Ker$M = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$.

Pour aux polynômes, la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ désignant le polynôme $P_0(X)=1$, on en déduit que

$$\text{Ker}\Phi = vect(X^0)$$

Autrement dit, $\boxed{\text{Ker}\Phi \text{ est l'ensemble des polynômes constants.}}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt$.

1. Déterminez l'ensemble de définition de f et étudiez la parité de f.
2. Justifiez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition et calculez $f'(x)$.
3. a) Montrez que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $0\leq 1-\cos t\leq \frac{t^2}{2}$
   b) En déduire que la fonction h définie par $h(x)=\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}dt$ admet une limite en 0 que l'on déterminera (on prendra soin de bien distinguer les cas $x>0$ et $x<0$...j'espère que vous devinerez pourquoi !)
   c) En déduire la limite de f en 0.
4. Limite en $+\infty$:
   a) Montrez que $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}dt=0$
   b) A l'aide d'une intégration par partie, montrez que f a une limite en $+\infty$, et précisez ensuite la limite en $-\infty$.

1. Comme la fonction $t\mapsto\dfrac{\cos(t)}{t}$ est continue sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, $f(x)$ existe si $[x,3x]\subset\,]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$, c'est à dire si et seulement si $x\in\mathbb{R}^*$.
La fonction est donc définie sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-x}^{-3x}\frac{\cos(t)}{t}dt \quad \text{on pose } u=-t,\ du=-dt \\ &= \int_x^{3x}\frac{\cos(-u)}{-u}(-1)du=\int_x^{3x}\frac{\cos(u)}{u}du=f(x) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est une fonction paire}}$.

2. Soit G une primitive de $t\mapsto\dfrac{\cos(t)}{t}$ sur $\mathbb{R}^*$ (une primitive existe sur chacun des deux intervalles, et on regroupe). Comme la fonction "primitivée" est continue, on a G de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=G(3x)-G(x)$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
On a enfin $f'(x)=3G'(3x)-G'(x)=3\dfrac{\cos(3x)}{3x}-\dfrac{\cos(x)}{x}$, ou encore

$$\boxed{f'(x)=\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{x}.}$$

3. a) Plusieurs versions possibles.

On peut utiliser la convexité de sin sur $[0, +\infty[$, pour avoir $\sin(t) \leq t$ pour tout $t > 0$. Puis intégrer entre 0 et x pour $x \geq 0$ et par croissance de l'intégrale, on en déduit la relation pour $x \geq 0$, puis pour $x \in \mathbb{R}$ par parité.

On peut aussi, mais c'est plus long, étudier la fonction $g(t) = \dfrac{t^2}{t} + \cos(t) - 1$. On a alors $g'(t) = t - \sin(t)$, puis $g''(t) = 1 - \cos(t)$. Ainsi $g''(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc g' est croissante. Comme $g'(0) = 0$, on en déduit son signe et le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $g''(x)$	$+$	0	$+$
g'	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$
signe de $g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$+\infty$ $\searrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Ainsi $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc $\dfrac{t^2}{2} \geq -\cos(t) + 1$ et comme $-\cos(t) \geq -1$, on en déduit que $\boxed{0 \leq 1 - \cos(t) \leq \dfrac{t^2}{2}}$.

b) Pour $x \geq 0$, $x \leq 3x$ et en intégrant l'inégalité précédente entre x et $3x$ on obtient

$$0 \leq h(x) \leq \int_x^{3x} \frac{t}{2} dt = [\frac{t^2}{4}]_x^{3x} = 2x^2$$

On obtient donc $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0$.

Pour $x \leq 0$, il faut inverser les bornes pour appliquer la croissance de l'intégrale, avant enfin d'obtenir l'encadrement

$$2x^2 \leq h(x) \leq 0$$

et alors $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = 0$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0}$.

c) Remarquons que $h(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1}{t} dt - f(x) = \ln(3x) - \ln(x) - f(x) = \ln(3) - f(x)$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ln 3.}$

4. a) Comme $|\sin(t)| \leq 1$, on obtient, pour $x \geq 0$ (ce qui permet d'utiliser la croissance de l'intégrale directement)

$$\left|\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt\right| \underbrace{\leq}_{\text{inégalité triangulaire}} \int_x^{3x} \left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| dx \underbrace{\leq}_{\text{croissance de } \int} \int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{x}$$

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = 0$

b) Pour l'intégration par partie, on va poser $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = \cos(t)$. Alors $u'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ et $v(t) = \sin(t)$. Comme ce sont bien des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, l'intégration par partie donne

D'où $f(x) = \underbrace{\left[\dfrac{\sin t}{t}\right]_x^{3x}}_{(1)} + \underbrace{\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt}_{(2)}$

Pour (1), pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|sin(3x) - 3\sin(x)| \leq |\sin(3x)| + |3\sin(x)| \leq 4$ car $|\sin(x)| < 1$. En divisant par $|x|$ il vient donc

$$\frac{|sin(3x) - 3\sin(x)|}{|3x|} \leq \frac{4}{|3x|}$$

Ainsi (1) $\to 0$ en $+\infty$.
Pour (2), c'est la question a) et on a (2) $\to 0$ en $+\infty$.
Finalement $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Comme f est paire, on a également $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Exercice 3 :

Soit f l'application définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$

1. Calculez $f^{(n)}(x)$ pour tout tout $x \in]-1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculez $\max_{t \in [0,1]} |f^{(n)}(t)|$.
3. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$:

$$\ln(1+x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Remarque : une telle formule s'appelle "développement série entière".

1. Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on peut donc dériver autant de fois que l'on veut.
   On calcule les premières dérivées ce qui permet de repérer une formule que l'on va ensuite montrer par récurrence :
   $$\forall n \geq 1, f^{(n)}(x) = (n-1)!(-1)^{n+1}\frac{1}{(1+x)^n}$$
   init : on a bien $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1-1)!(-1)^{1+1}\dfrac{1}{(1+x)^1}$
   hérédité : soit $n \geq 1$. Supposons $f^{(n)}(x) = (n-1)!(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(1+x)^n}$.
   Alors $f^{(n)}(x) = (n-1)!(-1)^{n+1}(1+x)^{-n}$ et donc $f^{(n+1)}x = -n(n-1)!(-1)^{n+1}(1+x)^{-n-1}$ c'est à dire
   $$f^{(n+1)}(x) = n!(-1)^{n+2}\frac{1}{(1+x)^{n+1}}$$
   conclusion : la propriété est héréditaire et initialisée, donc la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.
2. Pour $x \in [0,1]$, $1 + x \geq 0$ et donc $|f^{(n)}(x)| = |(n-1)!(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(1+x)^n}| = (n-1)!\dfrac{1}{(1+x)^n}$
   De plus, $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^n}$ est décroissante, donc le maximum sur $[0,1]$ est atteint pour $x = 0$, c'est à dire
   $\max_{t \in [0,1]} |f^{(n)}(t)| = (n-1)!$
3. Pour tout $n \geq 1$, et $x \in [0,1]$, l'inégalité de Taylor Lagrange en 0 (applicable à f qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc $\mathcal{C}^{n+1}$) donne
   $$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + R_n(x)$$
   avec $|R_n(x)| \leq M\dfrac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!}$ avec $M = (n)!$ un majorant de $f^{(n+1)}$.
   Or, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$ pour $k \geq 1$ et $f^{(0)}(0) = 0$ donc
   $$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$
   Pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1} \to 0$ donc par encadrement, on en déduit
   $$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = \ln(1+x)$$

Attention : l'étape

$$x \in [0,1], \text{ donc } \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0$$

est cruciale ! x^n n'est pas borné si $x > 1$, et même $\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1} \to +\infty$ dans ce cas.
Attention à bien justifier ça...