

Analyse - Chapitre 11bis : Intégration.

- Feuilles d'exercices -

Exercice 1 : prolongement du DM

Soient f et G les fonctions définies par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\ln(1+t^2)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad G(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$$

On a montré dans le DM que G était définie sur $\mathbb{R}$, était paire, avec un maximum local en 0.

On se propose de prolonger l'étude :

1. ETUDE DES VARIATIONS DE G

a) Montrez que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour $x \neq 0$,

$$G'(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{(1+x^4)^2}{1+x^2} \right)$$

b) Déterminez $G'(0)$ et justifiez que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c) Montrez que G est croissante sur $[1, +\infty[$. (Indication : on pourra par exemple étudier le signe du polynôme $X^8 + 2X^4 - X^2$ sur $[1, +\infty[$.)

2. COMPORTEMENT EN $\pm\infty$ DE G

a) Montrez à l'aide d'un changement de variable, que pour $x > 0$,

$$G\left(\frac{1}{x}\right) = - \int_x^{x^2} \frac{1}{u} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du$$

b) Justifiez que pour tout $v > 0$, $0 \leq \ln(1+v) \leq v$.

c) Montrez que pour $x > 1$,

$$0 \leq -G\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{2x^2}$$

d) Quelle relation similaire avons nous si $x \in]0, 1[$?

e) Déterminez une primitive à la fonction $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) = \frac{\ln(t^2)}{t}$$

f) En déduire, pour $x > 0$, que :

$$G(x) = -G\left(\frac{1}{x}\right) + 3(\ln x)^2$$

puis, pour tout $x > 1$, que :

$$3(\ln x)^2 \leq G(x) \leq 3(\ln x)^2 + \frac{1}{2x^2}$$

g) Déterminez la limite de G en $+\infty$ et donnez un équivalent de G au voisinage de $+\infty$. Même question en $-\infty$.