

Analyse - Chapitre 13 : Séries numériques

Exercice 1 :

On considère la série de terme général $u_n = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.
2. Décomposer en élément simple la fraction rationnelle $\frac{2}{X(X+1)(X+2)}$
3. En déduire la valeur des sommes partielles S_n de cette série et déterminer la somme de la série.

Exercice 2 :

Déterminez la nature des séries de terme général u_n suivantes (on ne demande pas la valeur de la somme dans le cas de convergence)

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $u_n = \frac{n+2}{3n^3-1}$ | 3. $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$ | 6. $u_n = \frac{\cos(n) + \sin(n)}{n^2}$ |
| | 4. $u_n = \frac{3}{\sqrt{(n+3)(n+1)}}$ | 7. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$ |
| 2. $u_n = \ln\left(1 - \frac{3}{n^2+2}\right)$ | 5. $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$ | 8. $u_n = \ln(\cos(1/n))$ |

Exercice 3 : Séries usuelles

Calculer les sommes des séries de terme général u_n suivantes

- | | | |
|-----------------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| 1. $u_n = \frac{n^2 - n - 1}{n!}$ | 2. $u_n = \frac{n^3}{n!}$ | 3. $u_n = n^2 \frac{x^n}{n!}$ |
|-----------------------------------|---------------------------|-------------------------------|

Exercice 4 :

Soit $u_n = \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

1. Montrez que $\sum u_n$ converge en calculant un équivalent de u_n .
2. A l'aide des propriétés du logarithme, écrire autrement u_n et faire apparaître des sommes télescopiques dans la somme partielle.
3. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

Exercice 5 :

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite positive, décroissante et soit $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

On suppose $\lim u_n = 0$.

1. Montrez que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que $\sum (-1)^n u_n$ est une série convergente.
3. En déduire un exemple de série convergente qui ne soit pas absolument convergente.