Analyse - Chapitre 13 : Séries numériques

Exercice 1 :

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge.
2. Décomposer en élément simple la fraction rationnelle $\dfrac{2}{X(X+1)(X+2)}$
3. En déduire la valeur des sommes partielles S_n de cette série et déterminer la somme de la série.

Exercice 2 :

Déterminez la nature des séries de terme général u_n suivantes (on ne demande pas la valeur de la somme dans le cas de convergence)

1. $u_n = \dfrac{n+2}{3n^3-1}$
2. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{3}{n^2+2}\right)$
3. $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$
4. $u_n = \dfrac{3}{\sqrt{(n+3)(n+1)}}$
5. $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{n^2}\right)$
6. $u_n = \dfrac{\cos(n)+\sin(n)}{n^2}$
7. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
8. $u_n = \ln(\cos(1/n))$

Exercice 3 : Séries usuelles

Calculer les sommes des séries de terme général u_n suivantes

1. $u_n = \dfrac{n^2-n-1}{n!}$
2. $u_n = \dfrac{n^3}{n!}$
3. $u_n = n^2\dfrac{x^n}{n!}$

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 5e$
3.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} n^2\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{N} n^2\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=1}^{N} n\frac{x^n}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)\frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} n\frac{x^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x^{n+1}}{(n-1)!} + x\sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{x^{n+2}}{n!} + x\sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} \\
&= x^2\sum_{n=0}^{N-2} \frac{x^n}{n!} + x\sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = x^2e^x + xe^x$.

Exercice 4 :

Soit $u_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

1. Montrez que $\sum u_n$ converge en calculant un équivalent de u_n.
2. A l'aide des propriétés du logarithme, écrire autrement u_n et faire apparaitre des sommes téléscopiques dans la somme partielle.

3. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

1. Pour pouvoir calculer un équivalent avec le ln, il nous faut une forme en $1 + u_n$ avec $u_n \to 0$.
Or $\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1 + 1 - \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1 + \frac{n(n+2) - n^2 - 2n + 1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$
Ainsi, $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n(n+2)})$, donc $u_n \geq 0$ et comme $\frac{1}{n(n+2)} \to 0$,
$$u_n \sim \frac{1}{n(n+2)} \sim \frac{1}{n^2)}$$
Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente $(2 > 1)$, on en déduit, par critère d'équivalence des SATP, que $\sum u_n$ converge.
2. Soit $N \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) &= \sum_{n=1}^{N} 2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \ln(n) + \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \ln(n+2)\end{aligned}$$
On a bien fait apparaitre deux sommes telescopiques.
3. Par telescopage : $S_N = \ln(N+1) - \ln(1) + \ln(2) - \ln(N+2) = \ln(2) + \ln(\frac{N+1}{N+2})$
Comme $\lim_{N \to +\infty} \frac{N+1}{N+2} = 1$, on en déduit $\lim_{N \to +\infty} S_N = \ln(2)$.

Exercice 5 :

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite positive, décroissante et soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

On suppose $\lim u_n = 0$.

1. Montrez que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que $\sum (-1)^n u_n$ est une série convergente.
3. En déduire un exemple de serie convergente qui ne soit pas absolument convergente.