séries - déterminant (DM 14)

Exercice 1 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculez le déterminant de A.
2. Soit φ l'endomorphisme (on ne demande pas de le démontrer) de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$\varphi(P) = XP'(X+2) + (X^3-1)P(1)$$

où $P'(X+2)$ est la composition de P' et $(X+2)$ (et non pas le produit).
Montrez que φ est bijectif.

1. En appliquant $L_4 = L4+L_1$, on a $det(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}) = det(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix})]$
   La matrice est triangulaire supérieure, d'où $det(A) = -1 \times 1 \times 2 \times 3 = -6$
2. On calcule les images de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, afin d'obtenir la matrice de φ dans cette base.
   On a alors
   $$\varphi(1) = X^3 - 1$$
   $$\varphi(X) = X.1 + X^3 - 1 = X^3 + X - 1$$
   $$\varphi(X^2) = X(2(X+2)) + X^3 - 1 = X^3 + 2X^2 + 4X - 1$$
   $$\varphi(X^3) = X(3(X+2)^2) + (X^3-1) = 4X^3 + 12X^2 + 12X - 1$$
   Ainsi, la matrice de φ est la matrice A de la question 1.
   Comme $det(A) = -6 \neq 0$, on en déduit que $det(\varphi) \neq 0$ et donc que φ est un isomorphisme.

Exercice 2 :

Soit $u_n = n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}}$

1. Montrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ et que $u_n \sim 1 - e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$
2. En déduire que u_n est équivalente au terme général d'une série de Riemann et conclure sur la convergence.

---

1. par définition $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ par croissance comparée, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.
   Enfin, comme $u_n = n^{\frac{1}{n}} - (n(1+\frac{1}{n}))^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}(1+\frac{1}{n}))^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}}\left(1-(1+\frac{1}{n}))^{\frac{1}{n}}\right)$
   En utilisant à nouveau la définition des puissances réelles, on a bien $u_n = w_n\left(1 - e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$ avec $\lim w_n = 1$, ce qui donne l'équivalent demandé.
2. On peut passer par un DL ou par l'équivalent de $e^x - 1$ en 0. Dans tous les cas, il faut bien justifier la substitution.
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ et que $e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$, on a $1 - e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. | Finalement, $u_n \sum -\frac{1}{n}\frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2}$
3. Petite coquille d'énoncé : c'est $|u_n|$ qui est équivalente à $\frac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), on en déduit que $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

Exercice 3 :

Soit $a \in \mathbb{R}$

1. Justifiez que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{a}{n^2+a^2}$ converge.
2. Montrez que, si $a > 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [k, k+1]$, on a
$$\frac{a}{(k+1)^2+a^2} \leq \frac{a}{t^2+a^2} \leq \frac{a}{k^2+a^2}$$
3. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$,
$$\int_0^{n+1} \frac{a}{a^2+t^2} dt \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{a}{k^2+a^2} \leq \int_0^n \frac{a}{a^2+t^2} dt + \frac{1}{a}$$
4. Toujours pour $a > 0$, en déduire un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$, puis donner $\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$
5. Que vaut $\lim_{a\to-\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$?

1. Pour tout $n \geq 1$, on a $\left|\frac{a}{a^2+n^2}\right| \leq |a|\frac{1}{n^2}$

   Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

   Par comparaison de SATP, $\sum \left|\frac{a}{a^2+n^2}\right|$ converge, c'est à dire $\sum \frac{a}{a^2+n^2}$ converge absolument, donc converge.

2. Si $a > 0$, la fonction $f : t \mapsto \frac{a}{a^2+t^2}$ est décroissante sur R_+

   (puisque de dérivée $-\frac{2at}{(a^2+t^2)^2} \leq 0$), donc pour tout $t \in [k, k+1]$, on a
$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$
   c'est à dire
$$\frac{a}{(k+1)^2+a^2} \leq \frac{a}{t^2+a^2} \leq \frac{a}{k^2+a^2}$$

3. On intègre la relation précédente entre k et $k+1$. Par croissance de l'intégrale, il vient :
$$\frac{a}{(k+1)^2+a^2}(k+1-k) \leq \int_k^{k+1} \frac{a}{t^2+a^2} dt \leq \frac{a}{k^2+a^2}(k+1-k)$$
$$\text{d'où } \frac{a}{(k+1)^2+a^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{a}{t^2+a^2} dt \leq \frac{a}{k^2+a^2}$$
   Effectuons maintenant la somme des inégalités de droite pour $k = 0$ jusqu'à $k = n$.
   Par Chasles, on a alors
$$\int_0^{n+1} \frac{a}{t^2+a^2} dt \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{a}{a^2+n^2}$$
   En procédant de même avec la somme de $k = 0$ jusqu'à $n-1$ à gauche, on a
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{(k+1)^2+a^2} \leq \int_0^n \frac{a}{t^2+a^2} dt$$
   Or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{(k+1)^2+a^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{(k)^2+a^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{(k)^2+a^2} - \frac{a}{a^2}$

   d'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{a}{(k)^2+a^2} - \frac{1}{a} \leq \int_0^n \frac{a}{t^2+a^2} dt$

   Et finalement on a l'encadrement voulu.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^n \frac{a}{t^2+a^2}dt = \int_0^n \frac{\frac{1}{a}}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1}dt = \arctan(\frac{n}{a})$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{a}{t^2+a^2}dt = \frac{\pi}{2}$ et en passant à la limite dans l'inégalité (possible car on sait déjà que la série converge), on obtient

$$\frac{\pi}{2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}$$

Et comme $\frac{1}{a} \to 0$, on obtient

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}$$

5. $a \mapsto \frac{a}{n^2+a^2}$ est impaire, donc on s'attend à obtenir $-\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$. Mais il y a le problème de la somme infinie : est-ce que la parité s'étend à la somme infinie ? A priori oui, mais pour le montrer simplement, on peut dire que, si $a < 0$, et comme la série est convergente, on a

$$-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-a}{n^2+a^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-a}{n^2+(-a)^2}$$

(la convergence est nécessaire pour pouvoir utiliser la linéarité)

En posant $A = -a$, on a $A > 0$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{-a}{n^2+(-a)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{A}{n^2+(A)^2} \underset{A\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$

Par composition de limite, on donc $\lim\limits_{a\to+\infty} -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}$ et finalement $\lim\limits_{a\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = -\frac{\pi}{2}$.