5.2.5 Gravitation-Exercice 2

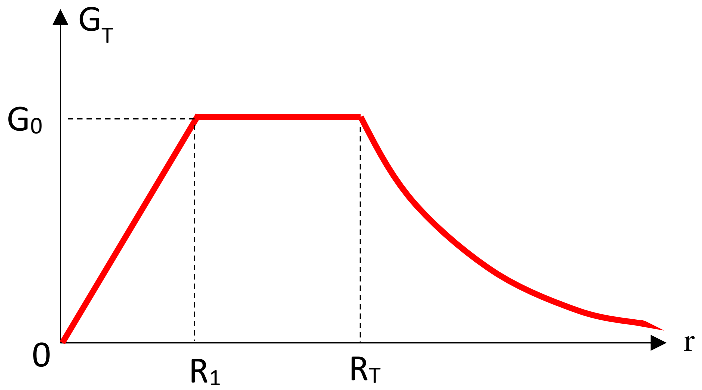
1-La Terre est assimilée à une sphère de centre O de rayon $R_T = 6{,}38.10^3$ km, de masse $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg, uniformément répartie dans tout le volume.

a-Déterminer le champ gravitationnel $\vec{G}_T$ en tout point de l'espace.

b-Tracer $G_T = \|\vec{G}_T\|$ en fonction de r.

c-Calculer la norme G_0 du champ gravitationnel à la surface de la Terre.

2-L'étude des ondes sismiques montre que le modèle d'une masse uniformément répartie n'est pas réaliste. Le modèle décrit par la courbe ci-dessous est plus conforme aux observations avec $R_1 = 3{,}5.10^3$ km :



a-Tracer sur le même graphe la courbe obtenue à la question précédente quand on supposait la masse volumique uniforme.

b-Calculer la masse volumique ρ_1 du noyau terrestre ($0 \le r \le R_1$).

c-Calculer la masse volumique $\rho_m(r)$ du manteau terrestre ($R_1 \le r \le R_T$)

d-Tracer l'allure de la masse volumique $\rho(r)$ de la Terre.

5.2.5 Gravitation-Exercice 2

1-a) <u>Invariances et symétries</u> : $\vec{G}_T(M) = G_r(r)\vec{u}_r$

<u>Théorème de Gauss</u> pour la sphère (S) de centre O et de rayon r : $\displaystyle\oiint_{(S)\text{fermée}} \vec{G}_T(P).d\vec{S}(P) = -4\pi G m_{\text{intérieure à (S)}}$

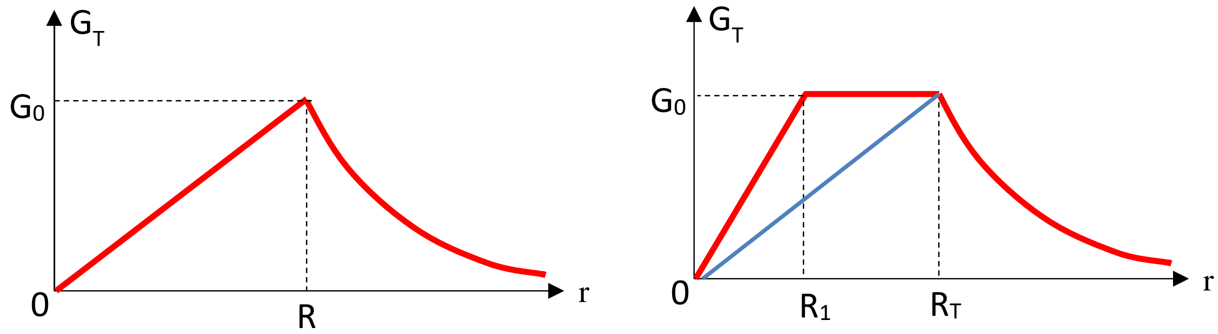
- <u>1[er] cas</u> : r > R_T (M extérieur à la Terre) $\qquad m_{\text{intérieure à (S)}} = M_T$

  Le théorème de Gauss donne : $4\pi r^2 G_r(r) = -4\pi G M_T \quad \Rightarrow \boxed{G_r(r) = -\dfrac{GM_T}{r^2}}$

- <u>2[ème] cas</u> : r < R_T (M intérieur à la Terre) $\qquad m_{\text{intérieure à (S)}} = \rho.\dfrac{4}{3}\pi r^3 = M_T\dfrac{r^3}{R_T^3}$

  Le théorème de Gauss donne : $4\pi r^2 G_r(r) = -4\pi G M_T\dfrac{r^3}{R_T^3} \quad \Rightarrow \boxed{G_r(r) = -\dfrac{GM_T r}{R_T^3}}$

b)



c) $G_0 = \dfrac{GM_T}{R_T^2}$ A.N : <u>$G_0 = 9{,}77$ m.s^{-2}</u>

2-b) D'après les calculs de la question 1-a), la variation linéaire de G_T dans le noyau indique que la masse volumique ρ_1 y est uniforme. On note M_1 la masse du noyau.

<u>Théorème de Gauss pour la sphère de rayon R_1</u> : $-4\pi R_1^2 G_0 = -4\pi G M_1 \Rightarrow M_1 = \dfrac{R_1^2 G_0}{G} = M_T\dfrac{R_1^2}{R_T^2}$

D'où la masse volumique du noyau : $\boxed{\rho_1 = \dfrac{M_1}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = \dfrac{3M_T}{4\pi R_1 R_T^2}}$ A.N : <u>$\rho_1 = 10^4$ kg.m^{-3}</u>

c) <u>Théorème de Gauss pour la sphère de rayon r</u> tel que $R_1 < r < R_T$:

$$-4\pi r^2 G_0 = -4\pi G[M_1 + 4\pi\int_{R_1}^{r}\rho_m(r')r'^2 dr']$$ où $\rho_m(r)$ est la masse volumique dans le manteau

On dérive par rapport à r : $-8\pi r G_0 = -4\pi G.4\pi\rho_m(r)r^2 \Rightarrow \rho_m(r) = \dfrac{G_0}{2\pi G r}$

Avec $G_0 = \dfrac{GM_T}{R_T^2}$ on obtient : $\boxed{\rho_m(r) = \dfrac{M_T}{2\pi R_T^2 r}}$

d) On calcule : $\rho_m(R_1) = 6{,}6.10^3$ kg.m^{-3}
$\rho_m(R_T) = 3{,}6.10^3$ kg.m^{-3}