5.2.2 Théorème de Gauss-Exercice 2

Une membrane cellulaire est assimilée au plan Oyz. Ox est perpendiculaire à la membrane, orienté vers l'extérieur de la cellule. O est sur la membrane. Toutes les grandeurs physiques ne dépendent que de x.
On schématise le potentiel par la fonction V(x) : pour $x \leq 0$: $V(x) = -V_0$
pour $x > 0$: $V(x) = -V_0 \exp(-x/a)$ avec $V_0 > 0$

a-Calculer le champ électrostatique.

b-Calculer la densité volumique de charges $\rho(x)$.

c-En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre d'axe Ox, de base S, compris entre les abscisses $x = 0^-$ et $x = 0^+$, montrer qu'il existe une répartition surfacique de charges sur la membrane et donner sa densité surfacique σ.

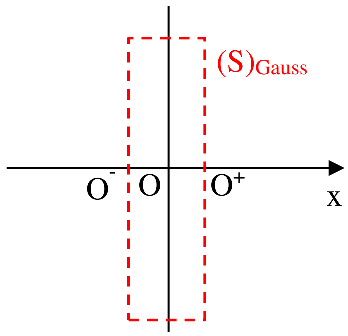
d-Calculer la charge totale contenue dans une colonne cylindrique perpendiculaire à la membrane et s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$.

---

a-La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ donne : $\boxed{\begin{cases} x < 0 \quad : \quad \vec{E} = \vec{0} \\ x > 0 \quad : \quad \vec{E} = -\dfrac{V_0}{a}\exp(-\dfrac{x}{a})\vec{u}_x \end{cases}}$

b-Equation de Maxwell-Gauss : $\rho = \varepsilon_0 \text{div}\vec{E}$ d'où : $\boxed{\begin{cases} x < 0 \quad : \quad \rho = 0 \\ x > 0 \quad : \quad \rho = \varepsilon_0 \dfrac{V_0}{a^2}\exp(-\dfrac{x}{a}) \end{cases}}$

c-Théorème de Gauss : $\oiint_{(S)} \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \dfrac{Q_{\text{int à }(S)}}{\varepsilon_0}$



Le champ électrostatique est nul sur le couvercle gauche

Le champ électrostatique sur le couvercle droit est $\vec{E}(x = 0^+) = -\dfrac{V_0}{a}\vec{u}_x$

$$\oiint_{(S)} \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \vec{E}(x = 0^+).S\vec{u}_x = -\frac{V_0}{a}S$$

Donc : $Q_{\text{int à }(S)} = -\dfrac{\varepsilon_0 V_0}{a}S$

Il y a donc une charge en surface de densité : $\boxed{\sigma = -\dfrac{\varepsilon_0 V_0}{a}}$

d-On applique le théorème de Gauss au cylindre d'axe Ox, de base S, s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$.
Le champ électrostatique étant nul aux deux extrémités, le flux est nul. Donc $\underline{Q_{totale} = 0}$
