5.2.4 Condensateur-Exercice 2

Soient deux cylindres infinis, concentriques d'axe Oz, de rayon R_1 et R_2.

Le cylindre 1 porte une charge Q par unité de longueur et le cylindre 2 une charge –Q par unité de longueur. Entre les deux cylindres se trouve un gaz initialement isolant de permittivité ε_0.
A l'instant t = 0, le gaz est ionisé et libère une charge positive Q/3 et une charge négative -Q/3 par unité de longueur. Le gaz devient alors conducteur de conductivité γ.

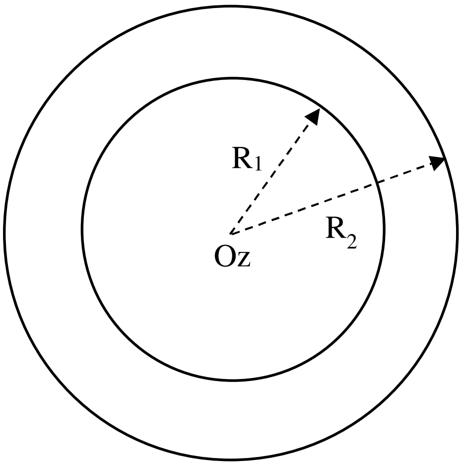
a-Que deviennent les charges positives et négatives après l'ionisation ?

b-Quelles sont les sources de champ magnétique ? En considérant les symétries, montrer que $\vec{B} = 0$.

c-Avec l'équation de Maxwell-Ampère, calculer le champ électrique $\vec{E}$ durant la phase transitoire.

d-Calculer la densité volumique de charge pendant la phase transitoire.
On donne : $\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ en coordonnées cylindriques.

e-Calculer la durée de la phase transitoire et le champ électrique dans tout l'espace à la fin de la phase transitoire.



5.2.4 Condensateur-Exercice 2

---

a-Pour t < 0 : Existence d'un champ électrostatique $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$ entre les deux cylindres chargés

Le théorème de Gauss appliqué à un cylindre de rayon r et hauteur unité donne $\vec{E}(M) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$

Pour t > 0 : Ce champ agit sur les charges d'ionisation.

Les charges négatives sont attirées par le cylindre 1 chargé positivement Les charges positives sont attirées par le cylindre 2 chargé négativement

b-Les sources de champ magnétique sont :

- Les courants radiaux dus aux charges d'ionisation : $\vec{j}(M) = j_r(r)\vec{u}_r$
- Le champ électrique radial variable au cours du temps pour t > 0 : $\vec{E}(M,t) = E_r(r,t)\vec{u}_r$

Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont plans de symétrie des sources : le champ magnétique doit être orthogonal à ces deux plans en même temps : <u>il est nul</u>.

c-MA : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}) = \vec{0}$ => $\gamma\vec{E} + \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ => $\dfrac{\partial E_r}{\partial t} + \dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}E_r = 0$ en projection selon $\vec{u}_r$

Solution : $E_r(r,t) = E_r(r,0)e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec : $\tau = \dfrac{\varepsilon_0}{\gamma}$ et $E_r(r,0) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r}$ = champ avant l'ionisation

Donc : $\boxed{\vec{E}(M,t) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r}e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{u}_r}$

d-Equation de Maxwell-Gauss : $\text{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ => $\rho = \varepsilon_0\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rE_r(r,t))}{\partial r}$ => $\boxed{\rho(r,t) = 0}$

e-A la fin de la phase transitoire de durée t_F : le cylindre 1 porte la charge $Q - \dfrac{Q}{3} = \dfrac{2}{3}Q$

le cylindre 2 porte la charge $-Q + \dfrac{Q}{3} = -\dfrac{2}{3}Q$

Le champ électrostatique entre les deux cylindres est alors : $\boxed{\vec{E}(M, t \geq t_F) = \dfrac{2Q/3}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r}$

Continuité du champ électrique à l'instant t_F : $\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r}e^{-\frac{t_F}{\tau}}\vec{u}_r = \dfrac{2Q/3}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$ => $e^{-\frac{t_F}{\tau}} = \dfrac{2}{3}$

Donc : $\boxed{t_F = \tau \text{Ln}\dfrac{3}{2}}$
